This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

3 3433 06907966 7

OEF
Tellkampf

Vorschule

der

Mathematik

von

Dr. Adolph Tellkampf

Ober-Lehrer am Gymnasio zu Hamm.

Mit 8 Kupfertafeln.

ASTOR LIBRARY
NEW-YORK.

Berlin bei August Rücker.

1829.

Grundriß

zu

Vorlesungen

über

Logik

B. F. Thibaut,

Königl. Großbritt. Hannöv. Hofrathe und Professor der Philosophie in Göttingen.

und

E. H. Dirksen,

Professor der Philosophie an der Universität und Mitgliede der Königl. Akademie der Wissenschaften in Berlin,

dem Lehrer und dem Freunde,

aus inniger Dankbarkeit und Verehrung

gewidmet.

Vorrede.

Die Bestimmung dieser Schrift ist — wie der Titel es hinreichend bezeichnet — eine durchaus practische: sie will Anfänger, bei denen sie neben der erforderlichen Reife des Verstandes nichts, als einige Fertigkeit im Rechnen voraussetzt, in das Gebiet der Mathematik einführen und mit allen wesentlichen Theilen der Elemente bekannt machen. Ihre Absicht geht daher nicht allein auf die formale Bildung des Geistes vermöge scharfer und allgemeiner Begriffe und abstracter Betrachtungen, sondern ebensowohl auf die Mittheilung derjenigen mathematischen Kenntnisse, deren der Fortschreitende — sei es nun zur Vorbereitung auf irgend einen practischen Beruf oder zum eigentlichen Studium der Wissenschaft — bedarf. Diese zweite Rücksicht hat eine Reichhaltigkeit des Stoffs herbeigeführt, die man bei'm Vergleich mit Lehrbüchern, welche sich absichtlich engere Gränzen gezogen, oder bei Abwägung des zufällig vorhandenen Bedürfnisses, vielleicht als einen Ueberfluß betrachten möchte; aber ein Blick auf die in Frankreich verbreiteten elementaren Lehrbücher der Mathematik wird die Beschränkung auch des vorliegenden zu erkennen geben, worin in der That nur das Wichtigere in möglichster Gedrängtheit Platz gefunden hat. Daher möge es Niemand dem Buche zum Vorwurf machen, wenn es mehr darbietet, als er für seinen besondern Zweck eben nöthig hat, z. B. die Fundamentalbetrachtungen der allgemeinen Arithmetik und der analytischen Geometrie im dritten Buche beider Abtheilungen. Der einsichtsvolle Lehrer wird — wenn er seine Schüler dazu nicht reif erachtet — solche Betrachtungen ohne Anstoß übergehen und nichtsdestoweniger spätere,

ihm leichter oder nöthiger erſcheinende, Gegenſtände (z. B. die Auflöſung der numeriſchen Gleichungen oder die ſynthetiſche Darſtellung der Kegelſchnitte) in den Unterricht aufnehmen. Es iſt durch ſyſtematiſche Anordnung des Stoffes Sorge getragen worden, daß das Auffinden und Hervorheben ſeiner einzelnen Theile ohne Mühe geſchehen und Manches ohne Verwirrung übergangen oder aufgeſpart werden kann, wozu namentlich die Einleitungen zu zählen ſind, die ihr völliges Verſtändniß für den Schüler erſt nachträglich erlangen. Jene Anordnung hofft übrigens, nicht der Willkühr beſchuldigt zu werden, da ſie aus dem, der Bearbeitung des Lehrbuchs zum Grunde liegenden, Beſtreben hervorgegangen, durch ſtrenge Entwickelung des Inhalts nach den Hauptbegriffen die zuſammengehörenden Betrachtungen einander ungetrennt folgen zu laſſen. Daß von den herkömmlichen Eintheilungen auf mehr als eine Art abgewichen iſt, muß als nothwendige Folge davon angeſehen werden.

Zunächſt iſt dieſes geſchehen mit der Betrachtung der Zahlenſyſteme, die hier erſt nach der Erörterung der Grundoperationen auftritt, weil dieſe als ſolche von dem Begriffe eines Zahlenſyſtems ganz unabhängig ſind. Daß man ſich zu ihrer Verdeutlichung durch Beiſpiele einer, dem Schüler bereits eingeübten, Bezeichnungsweiſe der Einheitsmengen bedient, verpflichtet noch keineswegs, ihm vor allen Dingen den Zuſammenhang ſeiner Zeichenſprache zu erklären. Dieſe Erklärung iſt vielmehr an ihrem Orte, wo man ſich zu der neuen Vorſtellung der Potenz erhebt. Die Decimalbrüche konnten bei der veränderten Stellung des Kapitels von der Numeration ohne Weiteres in daſſelbe aufgenommen werden, ſo wie in demjenigen von den Progreſſionen Gegenſtände ſich vereinigen ließen, die ſonſt zerſtreut vorkommen. Andere Abweichungen in der Anordnung oder Terminologie der Arithmetik werden ſich

mit noch leichterer Mühe, als die hier genannten, rechtfertigen. In der Darstellung der Geometrie wird die Lehre von der Aehnlichkeit am abweichendsten, aber hoffentlich einfach und consequent erscheinen: der neue Begriff forderte hier neue Benennungen, und da er nicht für den der Congruenz anticipirt werden durfte, mußte auch aus deren Andeutung (≡) das Zeichen ∽ ausgeschlossen bleiben. Die Vertauschung des Namens körperlicher Winkel mit dem passenderen Raumecke erschien mir für die Bestimmtheit des Ausdrucks um so wünschenswerther, je mehr ich mich bemühete, den Gegenstand (in §. 303) ausführlicher und selbstständiger zu betrachten, als es gewöhnlich geschieht.

Die Kürze der Darstellung, welche ich stets mit hinreichender Deutlichkeit zu vereinigen gesucht, hat der mündlichen Belehrung noch Manches zu ergänzen übrig gelassen, wie es sich für ein, dem öffentlichen Unterrichte bestimmtes Lehrbuch gehört. Als einige von denjenigen Stellen meiner Bearbeitung, worin ich auf jene wünschenswerthe Verbindung von Allgemeinheit, Klarheit und Kürze vorzüglich hingestrebt, nenne ich dem Beurtheiler die §§ 145—147; 179—80; 211—12; 217—19; 225; 286—87; 328—29; 333—34; 344; 351.

Unter denjenigen mathematischen Werken, welche ich für die vorliegende Schrift benutzt und zu benutzen für meine Pflicht gehalten, habe ich als Hauptquellen vor Allen Thibaut's Grundriß der reinen Mathematik und die Elémens de géometrie von Legendre anzuführen. In dem erstgenannten Werke ist die elementare Arithmetik auf eine so meisterhafte Weise in allgemeinen und scharfen Umrissen dargestellt worden, daß mir bei dem gerechten Zweifel, ob auf irgend einem andern, als dem dort gebahnten, Wege der Darstellung die arithmetischen Grundlehren an Klarheit und Bestimmtheit je werden gewinnen können, nichts als

die weitere Ausführung im Einzelnen übrig blieb. Eben so erschien mir in Beziehung auf die Geometrie die Behandlung dieser Wissenschaft von Legendre so musterhaft, daß ich glaubte, mich vorzugsweise an dieses Vorbild halten zu müssen. Wo ich entschieden von ihm abgewichen bin, machte dieses, theils die andere Anordnung, theils die vorgeschriebene Kürze nöthig. Die letzte Rücksicht bestimmte mich namentlich bei der Inhaltsbestimmung der Körper, die man schon als eine Anwendung der geometrischen Theoreme betrachten kann, durch Einmischung arithmetischer Begriffe nähere Wege zum Ziele zu suchen. Man vergleiche in dieser Beziehung die Inhaltsbestimmung der Pyramide in § 328, L. 3 mit der Darstellung von Legendre im 6. Buche, Satz 18.

Ausser den beiden vorerwähnten habe ich noch die nachstehenden Schriften mit gebührendem Danke zu nennen und bei einer jeden anzumerken, an welchen Stellen meiner Bearbeitung sie zu Rathe gezogen oder benutzt worden ist:

I. Für die Arithmetik.

Thibaut's Grundriß der allg. Arithmetik; §. 153—194.
Kramp élémens d'arithmétique univ. §. 182; 216.
Egen's Handbuch der allg. Arithmetik; §. 195—204.
Bauer's Entwickelung aller mögl. Wurzeln der num. Gleichungen; §. 205—209.
Spehr's Lehrbegriff der Combinationslehre; §. 166.
Scherk's mathematische Abhandlungen; §. 175.

II. Für die Geometrie.

Göbel's Grundlehren der Geom.; §. 273, L. 7. §. 357, 363, 369.
Jacobi de triangulorum rectil. proprietatibus; §. 293.
Crelle's Journal für die reine und angew. Mathem. 1. u. 2. Bd.; und zwar:
1) Olivier über den 11. Grundsatz in Euklid. Elem. §. 250, L. 3.
2) Olivier über einige Definitionen in der Geom. §. 264.
3) Steiner von der Verwandlung und Theilung sphär. Figuren durch Construction; §. 316, L. 16—18. und §. 317.

Inhalt.

Allgemeine Einleitung. . . . . Seite 1

1) Größe. 2) Gegenstand der Mathematik. 3) Theilbarkeit der Größe. 4) Einheit. 5) Diskrete Größen. 6) Stetige Größen. 7) Arithmetik. 8) Raum- und Bewegungslehre. 9) Verbindung der Arithmetik und Geometrie.

Erste Abtheilung. Arithmetik.

I. Buch. Die Grundoperationen. 7

10) Zahl. 11) Benannte und unbenannte Zahl. 12) Ganze und gebrochene Zahl. 13) Das Zählen. 14) Arithmetik. 15) Grundoperationen.

1. Kapitel. Die Grundop. in ganzen Zahlen. . 9

16) Princip der Verknüpfungen. 17) Addition. 18) Subtraction. 19) Folgerungen. 20) Multiplication. 21) Verwechselung der Factoren. 22) Folgerungen. 23) Division. 24) Folgerungen.

2. Kapitel. Die Grundop. in gebrochenen Zahlen.. 14

25) Bestandtheile des Bruchs. 26) Bruchs- und Divisionsform. 27) Folgerungen. 28) Rechnungsarten mit Brüchen. 29) und 30) Addition. 31) und 32) Subtraction. 33) Folgerungen. 34) und 35) Multiplication. 36) und 37) Division. 38) Folgerungen. 39) Vereinfachung der Brüche.

3. Kapitel. Die Grundoper. mit widerstreitenden Zahlen. 22

40) Widerstreitende Größen. 41) Positiv und Negativ. 42) Bezeichnungsart. 43) Addition. 44) Subtraction. 45) Multiplication. 46) Division.

4. Kapitel. Die Grundop. in allgem. Zeichen . S. 27

47) Gebrauch der Buchſtaben. 48) Addition. 49) Subtraction. 50) Multiplication. 51) Diviſion. 52) Allgemeinſte Darſtellung durch Buchſtaben.

5. Kapitel. Die einfachen Gleichungen. . . . 33

53) Anwendung der Grundoperationen. 54) Gleichung. 55) Auflöſung der Gleichungen. 56) Regeln der Auflöſung. 57) Anwendungen. 58) Vorzeichen im Reſultat. 59) Gleichungen mit zwei unbekannten Größen. 60) Regeln der Auflöſung. 61) Anwendungen. 62) Gleichung. mit mehreren unbekannten Größen. 63) Allgemeine Darſtellung.

6. Kapitel. Die Differenz- und Verhältnißgleichungen. 43

64) Verhältniſſe und Proportionen. 65) Differenzgleichungen. 66) Verbindung derſelben. 67) Verhältnißgleichungen. 68) Künſtliche Umformung. und 69) Verbindung derſelben. 70) Anwendungen.

II. Buch. Die Rangoperationen. 50

71) Rang der Zahlen. 72) Potenz. 73) Wurzel. 74) Exponent. 75) Rangoperationen.

1. Kapitel. Die Zahlenſyſteme. 52

76) Grundzahl. 77) Höhere Einheiten. 78) Einfluß der Stelle. 79) Verbindung der Zahlen. 80) Addition. 81) Subtraction. 82) Multiplication. 83) Diviſion. 84) Niedrigere Einheiten. 85) Decimalbrüche. 86) Bezeichnung. 87) Verbindung derſelben. 88) Addition. 89) Subtraction. 90) Multiplication. 91) Diviſion. 92) Periode eines Decimalbruchs. 93) Verwandlung in Decimalbrüche.

2. Kapitel. Bildung und Auflöſung der zweiten Potenz. 61

94) Quadrat. 95) Quadrat eines Binomiums. 96) Quadrat eines Polynomiums. 97) Quadrat dekadiſcher Zahlen. 98) Rang der Quadratzahlen. 99) Quadratwurzel. 100) Irrationalzahlen. 101) Quadratw. aus Brüchen. 102) Imaginäre Größen. 103) Quadratiſche Gleichungen. 104) Anwendungen.

3. Kapitel. Bildung und Auflösung der dritten Potenz . . . . . S. 71

105) Cubus. 106) Cubus eines Binomiums. 107) Cubus eines Polynomiums. 108) Cubus dekadischer Zahlen. 109) Rang der Cubikzahlen. 110) Cubikwurzel. 111) Irrationale Cubikwurzel. 112) Cubikwurzel aus Brüchen. 113) Zeichen der Cubikwurzel. 114) Cubische Gleichungen.

4. Kapitel. Allgemeine Potenzenrechnung. . . 77

115) Negat. und gebr. Exponenten. 116) Allgemeiner Begriff der Potenz. 117) Umformung der Potenzen. 118) Umformung der Wurzelgrößen. 119) Addition und Subtraction. 120) Multiplication. 121) Division. 122) Potenzirung. 123) Zeichen der Potenzen. 124) Zeichen der Wurzeln. 125) Zahlform unmöglicher Größen. 126) Anwendungen.

5. Kapitel. Die Logarithmen. 88

127) Begriff. 128) Berechnung der Logarithmen. 129) Log. Tafeln. 130) Proportionaltheile. 131) Negative Logvrithmen. 132) Rechnungsarten mit Logarithmen. 133) Dekadische Ergänzung. 134) Exponentialgrößen.

6. Kapitel. Die Progressionen. 96

135) Differenz- und Factorenreihen. 136) Arithm. Progression. 137) Geom. Progression. 138) Abnehmende Progression. 139) Zinsrechnung. 140) Anwendungen. 141) Terminliche Zahlungen. 142) Anwendungen. 143) Interpolation der Diff. R. 144) Interpolation der Fact. R. 145) Figurirte Zahlen. 146) Polygonalzahlen. 147) Höhere Differenzreihen. 148) Anwendungen.

III. Buch. Die allgemeine Arithmetik. . . 110

149) Fuction. 150) Reihen. 151) Analysis. 152) Analyt. Operationen.

1. Kapitel. Die combinatorischen Operationen. . 112

153) Combinationslehre. 154) Anordnung der Formen. 155) Bildungsgesetz. 156) Comb. Operationen. 157) Wiederholbarkeit der Elemente. 158) Permutation. 159) Combination. 160) Variation. 161) Anzahl der Perm. Formen; 162) der Var. Formen; 163) der Comb. Formen. 164) Be-

dingte Combination. 165) Bedingte Variation. 166) Combinat. Formeln. 167) Anwendungen.

2. Kapitel. Die Grundop. mit Reihen. . S. 123

168) Form der Reihen. 169) Combinatorische Bezeichnungsart. 170) Addition und Subtraction. 171) Multiplication. 172) Producte zweitheiliger Factoren. 173) Division. 174) Coefficientenbestimmung. 175) Elimination.

3. Kapitel. Die Potenzirung der Reihen. . . 132

176) Potenz eines Binomiums. 177) Binomischer Lehrsatz. 178) Binomialcoefficienten. 179) Bin. Lehrsatz für negat. Exponenten. 180) Bin. L. für gebr. Exponenten. 181) Anwendungen. 182) Polynomischer Lehrsatz. 183) Anwendungen.

4. Kapitel. Die Exponentenreihen. 140

184) Exponential- und logarithm. Reihe. 185) Exponentialreihe. 186) Coefficientenbestimmung. 187) Exponential-Modulus. 188) Logarithm. Reihe. 189) Coefficientenbestimmung. 190) Logarithm. Modulus. 191) Logarithmenberechnung. 192) Künstliche Logarithmen. 193) Imaginäre Exponenten. 194) Tafeln für Sinus und Cosinus.

5. Kapitel. Die Auflösung der Gleichungen. . 152

195) Algebra. 196) Form der Gleichungen. 197) Bildung aus Binomialfactoren. 198) Zerlegung in Binomialfactoren. 199) Anzahl der Wurzeln. 200) Positive und negative Wurzeln. 201) Anzahl derselben. 202) Imaginäre Wurzeln. 203) Gränzen der Wurzeln. 204) Begränzung durch Differenzreihen. 205) Bestimmung der Wurzeln. 206) Auflösung cubischer Gleichungen. 207) Reduction cubischer Gleichungen. 208) Aufl. biquadratischer Gleichungen. 209) Nähere Bestimmung der Wurzeln.

Anhang. Die Cardanische Regel. 166

6. Kapitel. Die Auflösuug unbestimmter Gleichungen. 168

210) Unbestimmte Analysis. 211) Theilbarkeit der Summen; 212) Anwendung auf das Decimalsystem. 213) Theilb. der Differenzen; 214) der Producte; 215) der Potenzen. 216) Entstehung der Kettenbrüche. 217) Näherungswerthe eines Kettenbruchs. 218) Differenzen der N. W. 219) Gränzen

der Annäherung. 220) N. M. gröſser Brüche. 221) Einfache unbeſtimmte Gleichungen. 222) Auflöſung beſonderer Fälle. 223) Allg. Auflöſung durch Subſtitution. 224) Fortſetzung. 225) Auflöſung durch Kettenbrüche. 226) Fortſetzung. 227) Höhere unbeſtimmte Gleichungen. 228) Unbeſtimmte quadrat. Gleichungen. 229) Anwendungen.

Zweite Abtheilung. Geometrie.

I. Buch. Die Geometrie der Ebene . . . Seite 191

230) Raum. 231) Dimenſionen. 232) Raumformen. 233) Erzeugung der Raumformen. 234) Zuſammenhang der R. F. 235) Grundconſtructionen.

1. Kapitel. Die Linien und Winkel 193

236) Linien. 237) Ebene. 238) Gerade Linien. 239) Kreislinie. 240) Meſſung gerader Linien. 241) Incommenſurable Linien. 242) Meſſung krummer Linien. 243) Winkel. 244) Winkelmeſſung. 245) Lehrſätze über Linien und Winkel.

2. Kapitel. Die geradlinigen Figuren 199

246) Figur. 247) Congruenz u. Gleichheit. 248) Dreieck. 249) Lehrſätze über die Congruenz der Dreiecke. 250) Lehrſ. über die Parallelen u. die Winkel im Dreiecke. 251) L. über Linien im Dreiecke. 252) Viereck. 253) Lehrſ. über das Viereck. 254) Vielecke. 255) Lehrſätze über die Polygone. 256) Aufgaben.

3. Kapitel. Der Kreis 212

257) Erklärungen. 258) Lehrſ. über die Sehnen im Kreiſe. 259) Lehrſ. über die Secanten u. Tangenten 260) L. über zwei Kreislinien. 261) Lehrſätze über die Winkel im Kreiſe. 262) L. über die regul. Polygone. 263) Aufgaben.

4. Kapitel. Die Aehnlichkeit der Figuren . . 220

264) Erklärungen. 265) L. von den Homologenten. 266) L. über die Aehnlichk. der Dreiecke. 267) Lehrſ. über Linien im

Dreiecke. 268) L. über die Aehnl. der Vielecke. 269) L. über Linien im u. am Kreise. 270) Aufgaben. 271) Umfang regulärer Polygone und des Kreises.

5. Kapitel. Die Flächenräume . . . . . S. 234

272) Flächenmaaß. 273) Lehrs. über die Gleichheit der Flächenräume. 274) L. üb. die Verhältnisse der Flächenräume. 275) L. über die Inhaltsbestimmung der Figuren. 276) Aufgaben.

6. Kapitel. Die ebene Trigonometrie . . . 242

277) Gegenstand der Trigonom. 278) Goniometrische Linien. 279) Goniom. Functionen. 280) Umfang der gon. Funct. 281) Ausdehnung der gon. Linien. 282) Lage der goniom. Linien. 283) Bezeichnung der gon. Funct. 284) Reduction der goniom. Funct. 285) Multiplication der goniom. Funct. 286) Funct. zweitheiliger Winkel. 287) Goniom. Formeln. 288) Berechnung der gonim. Functionen. 289) Goniom. Tafeln. 290) Anwendung der Goniometrie. 291) Trig. Lehrs. üb. rechtwinkl. Dreiecke. 292) Allg. trig. L. üb. Seiten u. Winkel. 293) Trig. Lehrs. üb. Transversalen. 294) Lehrs. über den Flächeninhalt des Dreiecks. 295) Aufgaben.

II. Buch. Die Geometrie des Raumes . . 266

296) Lage im Raume. 297) Stereometrie.

1. Kapitel. Die Linien, Ebenen u. Winkel. . 267

298) Linien, Ebenen u. Winkel. 299) Winkel im Raume. 300) L. über die gegens. Lage von Linien und einer Ebene. 301) L. über die gegens. Lage von Linien und mehreren Ebenen. 302) Aufgaben.

2. Kapitel. Die ebenflächigen Körper . . . 275

303) Körper. 305) Congruenz u. Symmetrie. 304) Raumecke. 306) Lehrs. über die dreiseitige R. E. 307) Pyramide. 308) L. über die Pyramide. 309) Prisma. 310) L. über das Prisma. 311) Polyeder. 312) L. über das Polyeder. 313) Aufgaben.

3. Kapitel. Die krummflächigen Körper . . 290

314) Kegel, Cylinder und Kugel. 315) Lehrs. über dieselben. 316) L. über das sphärische Dreieck. 317) Aufgaben.

4. Kapitel. Die Aehnlichkeit der Körper . S. 299

318) Erklärungen. 319) L. von den Convexgruten im Raume. 320) L. über die Aehnlichkeit der Pyramiden. 321) L. über die Aehnl. der Polyeder. 322) L. über die Aehnlichkeit der krummflächigen Körper. 323) L. über Linien in und an der Kugel. 324) Aufgaben.

5. Kapitel. Die Körperräume 306

325) Körpermaaß. 326) Lehrs. über die Gleichheit der Körper. 327) L. über das Verhältniß der Körper. 328) L. über die Inhaltsbestimmung der Körper. 329) L. üb. die Bestimmung der Oberfläche und des Inhalts krummflächiger Körper. 330) Aufgaben.

6. Kapitel. Die sphärische Trigonometrie . . 318

331) Gegenstand der sphär. Trig. 332) Trig. Lehrs. für rechtw. sphär. Dreiecke. 333) Allg. trigonom. Lehrs. für sphärische Dreiecke. 334) Umformung der sphär. trig. Grundformeln. 335) Aufgaben.

III. Buch. Die höhere Geometrie 329

336) Krumme Linien und Flächen. 337) Beziehungslinien. 338) Beziehungsebene. 339) Analytische Geometrie.

1. Kapitel. Die geraden Linien und Winkel . . 331

340) Coordinaten. 341) Bezeichnung der Lage. 342) Gleichung der geraden Linie. 343) Ausdruck des Winkels. 344) Coordinaten-Transformation. 345) Aufgaben.

2. Kapitel. Die krummen Linien 338

346) Geometrische Oerter. 347) Gleichungen der Curven. 348) Eintheilung der Curven. 349) Intersection der Curven. 350) Anwendungen. 351) Curven zweiter Ordnung. 352) Arten derselben.

3. Kapitel. Die Parabel 348

353) Kegelschnitt der Parabel. 354) Gleichung der Parabel. 355) Gestalt der Parabel. 356) Coordinaten-Transformation. 357) L. über die Parabel. 358) Aufgaben.

4. Kapitel. Die Ellipse . . . . . S. 357

359) Kegelschnitt der Ellipse. 360) Gleichung der Ellipse. 361) Eigenschaften derselben. 362) Coordinaten-Transformation. 363) L. über die Ellipse. 364) Aufgaben.

5. Kapitel. Die Hyperbel 367

365) Kegelschnitt der Hyperbel. 366) Gleichung der Hyperbel. 367) Eigenschaften der Hyperbel. 368) Coordinaten-Transformation. 369) L. über die Hyperbel. 370) Aufgaben.

6. Kapitel. Die ebenen u. krummen Flächen. 377

371) Analyt. Darstellung der Flächen. 372) Bezeichnung der Lage. 373) Intersection der Flächen. 374) Eintheilung der Flächen. 375) Flächen der ersten Ordnung. 376) Flächen der zweiten Ordnung. 377) Rotationsflächen. 378) Kegel, Cylinder und Kugel. 379) Paraboloid, Ellipsoid u. Hyperboloid. 380) Aufgaben.

Wissenschaftliche Anlage

der

Vorschule der Mathematik.

Erste Abtheilung.
Arithmetik.

Erstes Buch.
Die Grundoperationen.

1. Kap. Die Grundop. in ganzen Zahlen.
2. — Die Grundop. in gebrochenen Zahlen.
3. — Die Grundop. mit widerstreitenden Zahlen.
4. — Die Grundop. in allgemeinen Zeichen.
5. — Die einfachen Gleichungen.
6. — Die Differenz- und Verhältnißgleichungen.

Zweites Buch.
Die Rangoperationen.

1. Kap. Die Zahlensysteme.
2. — Die Bildung und Auflösung der zweiten Potenz.
3. — Die Bildung und Auflösung der dritten Potenz.
4. — Die allgemeine Potenzenrechnung.
5. — Die Logarithmen.
6. — Die Progressionen.

Drittes Buch.
Die allgemeine Arithmetik.

1. Kap. Die combinatorischen Operationen.
2. — Die Grundoperationen mit Reihen.
3. — Die Potenzirung der Reihen.
4. — Die Exponentenreihen.
5. — Die Auflösung der Gleichungen.
6. — Die Auflösung unbestimmter Gleichungen.

Zweite Abtheilung.
Geometrie.

Erſtes Buch.
Die Geometrie der Ebene.

1. Kap. Die Linien und Winkel.
2. — Die geradlinigen Figuren.
3. — Der Kreis.
4. — Die Aehnlichkeit der Figuren.
5. — Die Flächenräume.
6. — Die ebene Trigonometrie.

Zweites Buch.
Die Geometrie des Raumes.

1. Kap. Die Linien, Ebenen und Winkel.
2. — Die ebenflächigen Körper.
3. — Die krummflächigen Körper.
4. — Die Aehnlichkeit der Körper.
5. — Die Körperräume.
6. — Die ſphäriſche Trigonometrie.

Drittes Buch.
Die höhere Geometrie.

1. Kap. Die geraden Linien und Winkel.
2. — Die krummen Linien.
3. — Die Parabel.
4. — Die Ellipſe.
5. — Die Hyperbel.
6. — Die krummen Oberflächen.

Allgemeine Einleitung.

1. **Größe.** Bei der Betrachtung mehrerer Dinge, wir mögen sie nun sinnlich wahrnehmen oder nur ihre Vorstellung in uns tragen, finden wir *Uebereinstimmung* oder *Verschiedenheit*, die sich entweder auf ein *Mehr oder Weniger* ihres gleichartigen *Inhalts* oder auf ihre *Beschaffenheit* und endlich auf beides zugleich beziehen kann. In der ersten Rücksicht liegt der Begriff der *Quantität* oder *Größe*, in der andern derjenige der *Qualität* oder *Art*. So nennen wir ein weißes und ein schwarzes Feld des Schachbretts ihrer Größe nach übereinstimmend, ihrer Art nach verschieden; ein Pfund Silber gleichartig mit einem Loth Silber, aber dem Gewicht oder der Masse nach größer; die Erdkugel und eine Billardkugel zugleich verschieden in Ansehung ihrer Qualität und Quantität, wenn sie auch in der Form übereinstimmend, also wegen ihrer Gestalt vergleichbar sind.

2. *Gegenstand der Mathematik.* Die Betrachtung der Dinge in Beziehung auf jenes Mehr oder Weniger ohne alle andre Rücksicht auf ihre Beschaffenheit, als die, daß man nur das *Gleichartige* zusammenstelle oder Größen von verschiedener Qualität zuvor dazu mache, ehe man sie vergleicht (wie verschiedene Waaren durch Angabe ihres Geldwerths), wird in ihrer ganzen Ausdehnung zu derjenigen Wissenschaft, die den Namen *Mathematik* (von μαθημα) erhalten hat und im Deutschen auch wol *Größenlehre* genannt zu werden pflegt. Ihre sämmtlichen Untersuchungen, so verschiedenartig sie auch übrigens seyn mögen, lassen sich auf den Grundbegriff der *Größe*, als ihren gemeinsamen Ursprung zurückführen.

3. *Theilbarkeit der Größe.* Dieser ursprüngliche Begriff von Größe oder Quantum gestattet in der Idee eine willkührliche Zerlegung in beliebige Theile, die stets gleichartig

unter einander und mit dem Ganzen bleiben und aus denen man ſich dieſes wiederum zuſammengeſetzt vorſtellen kann. Da aber nicht jede Größe in der Wirklichkeit eine ſolche Theilung erlaubt, ſo iſt man genöthigt, einen Unterſchied zwiſchen jenen willkührlich zerlegbaren, ſtetigen oder continuirlichen Größen und ſolchen zu machen, die aus Beſtandtheilen zuſammengeſetzt ſind, an denen, ohne ihren Begriff aufzuheben, weiter keine Theilung vorgenommen werden kann, weshalb man ſie als diskrete oder durch ihre Natur bereits geſonderte Größen von jenen unterſcheidet. Alle Zeit- und Raumgrößen (und daher auch Erſcheinungen, welche mit ihnen zuſammenfallen) ſind ſtetig, alle aus individuellen Dingen zuſammengeſetzte (eine Geſellſchaft, Bibliothek, Baumreihe) ſind discrete oder geſonderte Größen.

4. Einheit. Man mag nun die eine oder die andere Claſſe von Größen in Betracht ziehen: immer wird man, um ein beſtimmtes Quantum aufzufaſſen, anzugeben haben, wie viel — entweder von ſelbſt oder durch unſere Willkühr geſonderte — gleiche Theile in ihr enthalten ſind. Man ſieht alſo, daß der einzelne Theil, welchen man als Maasſtab des gegebenen Ganzen oder als die Einheit betrachtet, woraus jenes als Vielheit ſich erzeugt, bei continuirlichen ganz unſerer Willkühr oder den Umſtänden überlaſſen, bei discreten aber durch ihre Natur immer gegeben iſt. — Die deutliche Erkenntniß irgend eines Quantums fordert die unmittelbare Vorſtellung jenes urſprünglichen Einfachen, wovon es als Vielfaches, Zuſammengeſetztes betrachtet werden kann.

5. Behandlung der Größen als discrete. Wenn man aber, um eine ſtetige Größe ihrem Inhalte nach erkennen, beſtimmen und angeben zu können, eine Zerlegung derſelben in einfache Beſtandtheile vorgenommen denkt, ſo wird ſie eben dadurch zu einer discreten gemacht. Dieſes iſt der Fall mit einer Linie, die in Fuße und Zolle, mit einem Zeitraume, der in Stunden und Minuten zerlegt worden iſt, da wir hier willkührlich diejenige Zerſtückelung in Einheiten vornehmen, die bei einer discreten Größe — z. B. bei einer Anzahl von Häuſern und Einwohnern — von ſelbſt vorhanden iſt. Man kann alſo alle Größen, inſofern ſie in geſonderte zerlegt werden können, als aus Einheiten zuſammengeſetzt betrachten.

6. Behandlung der Größen als stetige. Von der andern Seite lassen sich aber auch Größen aller Art als stetige oder unbeschadet ihres Begriffes einer beliebigen Theilung fähig betrachten, mögen sie auch immerhin zu den discreten gehören, wenn nicht etwa die mathematische Untersuchung sich ausdrücklich die Verpflichtung auferlegt, auf jene natürliche Absonderung Rücksicht zu nehmen und z. B. keinen Viertel-Menschen in der Rechnung zu dulden. Im Allgemeinen werden die von Natur discreten Größen es sich gefallen lassen müssen, daß man sie völlig so wie die stetigen behandle, oder im Gedanken jede beliebige Theilung mit ihnen vornehme, wenn die Wirklichkeit sie auch nicht gestatten sollte, da die Wissenschaft der Größen ihre Methoden und Regeln so entwickeln muß, daß sie auf beliebig zerlegte oder stetige Größen anwendbar werden.

7. Arithmetik. Die völlig allgemeine Behandlungsweise von Größen aller Art, die, von der besondern Beschaffenheit oder Bedeutung derselben absehend, ihre Quantität als ein Stetiges betrachtet, in ein Gesondertes zerlegt, das Zerlegte wiederum verknüpft und die Art und Weise, wie solches geschehen, durch Zahlen ausspricht, um mit diesen Zahlen als Größen-Symbole zur Auffindung von Wahrheiten und Gesetzen im Gebiete der Größenverbindungen zu gelangen, die nicht unmittelbar in unserer Vorstellung liegen — diese allgemeinste Behandlungsweise der Größen begreift man unter dem Namen Arithmetik. Aus dem Begriff derselben geht also hervor, wie sie nicht allein an der Spitze aller einzelnen Zweige der Mathematik stehen, sondern diese sämmtlich als untergeordnete Theile eines großen Ganzen umfassen müsse.

8. Raum- und Bewegungslehre. Die besondern Zweige der Wissenschaft, welche sich mit räumlichen Gestalten und der Bewegung beschäftigen, erfordern deshalb eine eigenthümliche Behandlung und besonders sorgfältige Ausführung, weil sie die, eigentlich allein stetigen, Raum und Zeit-Größen zum Gegenstande haben, bei denen Begriff und Erkenntniß aus der Anschauung fließen, gleichviel, ob wir unsern Gegenstand sinnlich oder durch die Einbildungskraft anschauen. Hier tritt nun, insofern das, in den Lehren der Arithmetik ausgesprochene, allgemeine mathematische Verfahren zur Anwendung kommen muß, die Nöthigung ein, jene stetigen Größen

durch die Beziehung auf einen gleichartigen, als Einheit gewählten Maasstab in der Vorstellung zu discreten zu machen, ohne dadurch ihre fernere Theilbarkeit zu beschränken. So werden wir durch die Raumlehre oder Geometrie zu einer Zerlegung und Verknüpfung von Raumgestalten geführt, wodurch dieselben für unsern Verstand freilich zu gesonderten, aus Theilen bestehenden, Größen werden, aber nichts desto weniger stetig bleiben.

9. Verbindung der Arithmetik und Geometrie. Die beiden Wege, welche die Mathematik verfolgt, sofern sie sich (arithmetisch) mit ganz allgemeinen und abstracten Untersuchungen über Größenverknüpfungen oder (geometrisch) mit anschaulichen, räumlichen Größen und deren eigenthümlichen Beziehungen beschäftigt, vereinigen sich, nachdem sie ihre eigenthümlichen Gebiete durchzogen, in der sogenannten analytischen Geometrie dergestalt, daß die geometrische Betrachtung in der Zeichensprache der allgemeinen Arithmetik dargestellt und umgekehrt die abstracte arithmetische Betrachtung durch geometrische Construction im Raume versinnlicht und deutlicher gemacht werden kann, wodurch die Wissenschaft allmählig zu derjenigen Höhe gelangt, von welcher man ihren Umfang erst abzusehn und ihren Werth zu beurtheilen im Stande ist.

Erste Abtheilung.

Arithmetik.

Erstes Buch.

Die Grundoperationen.

10. Zahl. Denkt man sich eine Größe als Vielheit einfacher Theile aus diesen, ihren Einheiten, zusammengesetzt, so ist das nächste Erforderniß die Angabe in Wort und Zeichen oder Darstellung ihrer Bildung aus der Einheit, vermöge der Zahl. Diese ist mithin Ausdruck jener mittelbaren Vorstellung einer Größe, welche wir durch deren Vergleichung mit der unmittelbaren gegebenen oder vorgestellten Einheit gewinnen.

11. Benannte und unbenannte Zahl. Sofern man mit einer Zahl zugleich den Begriff der Dinge verbindet, deren Einheitsmenge sie aussprechen soll oder jene Dinge ausdrücklich neben ihr nennt, heißt sie eine benannte Zahl im Gegensatze der völlig abstracten oder unbenannten, welche sich auf keinen besondern Gegenstand bezieht, sondern aus dem allgemeinen Begriffe der Einheit hervorgegangen ist, deren aliquotes (mehrfaches oder auch theilweises) Setzen auf eine bestimmte Weise durch sie ausgesprochen wird. In dem Satze: die Stunde hat 60 Minuten; folglich verrinnt die Minute 60mal in einer Stunde — ist dieselbe Zahl zuerst eine benannte, dann eine unbenannte.

12. Ganze und gebrochene Zahlen. Zahlen, die sich aus der mehrfach wiederholten Einheit zusammensetzen oder in eine bestimmte Menge von Einheiten genau zerlegen lassen, werden ganze genannt. Aber eben sowol kann es sich ereignen, daß eine Größe entweder kleiner ist,

als die Einheit, womit sie verglichen oder gemessen werden soll, oder doch nicht genau mehrere Mal so groß, sondern etwas zur weitern Vergleichung übrig läßt. In solchen Fällen ist man genöthigt, die Einheit selbst in kleinere Theile zu zerlegen, um durch die Wiederholung eines solchen Theils den Werth der Größe anzugeben, welche weniger als ein Ganzes betrug. Dies ist die Entstehung der gebrochenen Zahlen, welche darstellen, was für Theile der Einheit und wie viele eine gegebene Größe bilden.

13. Das Zählen. Zu beiden Größenangaben, ganzen und gebrochenen Zahlen, gelangt man durch das Zählen ihrer Einheiten oder Theile, welches darin besteht, daß diese einzeln aufgefaßt, mit dem schon Vorhandenen verbunden und die stets um eine Einheit zunehmende Größe durch stets andere Zahlzeichen und Benennungen ausgesprochen wird. Das Zählen würde aber, wenn ursprüngliche Zeichen und Namen für jede Einheitsmenge nöthig wären, zu einem eben so mühsamen als unvollkommenen Gedächtnißwerke, und folgt daher, um durch die Verbindung weniger Zahlzeichen oder Ziffern und eben so einfach sich ergebender Benennungen jede beliebige Zahl darstellen zu können, bestimmten Grundsätzen und Regeln der sogenannten Numeration, wovon erst an einem spätern Orte (§. 76. u. f. w.) der deutliche Begriff mitgetheilt werden kann.

14. Die eigentliche Beschäftigung der Arithmetik besteht nun in der mannigfaltigen Verknüpfung jener Zahlen und der Entwickelung allgemeiner, daraus sich ergebender, Regeln und Gesetze. Solche Regeln und Gesetze gründen sich aber auf eine, unter den Größenverbindungen und ihren Bestandtheilen jedesmal Statt findende gegenseitige Beziehung und Abhängigkeit (angedeutet durch das, zwischen zwei gleichbedeutende Ausdrücke gestellte Gleichheits-Zeichen =), wonach mit der Aenderung eines einzigen unter denselben auch eine Aenderung des Resultats verbunden ist — ein Umstand, der es möglich macht, aus einzelnen gegebenen andere unbekannte, von jenen abhängige, Größen zu bestimmen.

15. Arithmetische Grundoperationen. Es wird für die Verknüpfung beliebig vieler Zahlen hinreichend seyn, die Grundsätze und Regeln zu kennen, nach denen ihrer zwei sich

verbinden, weil man ja auf diesem Wege nur fortfahren und nach und nach jede neue Zahl zu dem schon Gewonnenen ziehen darf, um die Vorschrift wiederholt darauf anzuwenden. Wenn wir aber die einfachsten Arten der Verknüpfung von zwei Zahlen näher untersuchen, so finden wir, daß eine solche auf zweifache Weise, durch Zusammenordnung und Unterordnung (Co- und Sub-ordination) möglich ist, und daß durch Umkehrung des Begriffes aus einer jeden dieser synthetischen Operationen eine analytische oder auflösende wird. So gelangt man zu vier Grundoperationen der Mathematik, die diesen Namen deshalb verdienen, weil sie sich nicht auf einfachere zurückführen lassen, daher die Grundlage der Wissenschaft bilden und in ihren spätern Untersuchungen unaufhörlich, wenn auch in weiterer Ausdehnung, zur Anwendung kommen.

Erstes Kapitel.

Die Grundoperationen in ganzen Zahlen.

16. Princip der Verknüpfungen. Es sind für die Verbindung von zwei Zahlen die beiden Fälle denkbar: daß sie entweder als gleichartig oder übereinstimmend in der Bedeutung ihrer Einheiten zusammengestellt und in ein Ganzes zusammengezogen werden sollen, oder daß aus der einen von ihnen nach der Vorschrift der andern eine neue Zahl als Resultat zu entwickeln ist. Der erste Fall erscheint bei der Addition (und Subtraction), der zweite in der Multiplication (und Division).

17. Addition. Die einfachste unter allen Zahlenverbindungen ist die, durch das Zeichen + (plus) angedeutete, da sie nur ein Zusammenfassen gegebener Theile in eine Summe fordert, wobei jene nothwendig als gleichartig gedacht werden. Diese Addition erscheint nun, indem immer eine Zahl zu der schon vorhandenen gezogen wird, als ein mit jedem neu hinzukommenden Theile fortgesetztes Zählen, welches in beliebiger Ordnung ausgeführt werden kann. So ist:

$$1+2+3+4 = (1+2)+3)+4 = (1+3)+2)+4$$
$$= (1+4)+2)+3 \text{ u. s. w.}$$

18. Subtraction. Die Umkehrung der Addition beſteht in der Aufſuchung eines von den beiden Theilen einer Summe, wenn dieſe ſammt dem andern Theile gegeben iſt. Inſofern man nun in dieſer Abſicht von der Summe, hier Minuendus genannt, ſo viele Einheiten abzieht, als in dem gegebenen Theile (dem Subtrahendus) enthalten ſind, darf dieſe Umkehrung der Addition, durch das Zeichen — (minus) angedeutet, eine Subtraction und das Geſuchte Reſt genannt werden. — Doch könnte man auch durch fortgeſetztes Addiren von Einheiten zum gegebenen Theile bis zur Erreichung der Summe den unbekannten finden, der nach beiden Anſichten zweckmäßiger mit dem Namen Differenz bezeichnet wird. — So erhält man die Differenz 3 der Zahlen 7—4 eben ſowol durch Hinzufügen von 3 Einheiten zu 4 als durch Abziehen derſelben von 7.

19. Folgerungen. Die Verbindung der Addition und Subtraction, indem Summen oder Differenzen in den gegebenen, zu verknüpfenden, Größen vorkommen, führt zu mehreren, in nachſtehenden Beiſpielen dargeſtellten und leicht in Worten auszuſprechenden Fällen, wo eine partielle Vereinigung des Additiven und des Subtractiven Statt finden kann:

1) $(7+4)+(9-2)=(7+4+9)-2=18.$
2) $(8-4)+(9-2)=(8+9)-(4+2)=11.$
3) $(20-4)-(9+2)=20-(4+9+2)=5.$
4) $(7+4)-(9-2)=(7+4+2)-9=4.$
5) $(20-4)-(9-8)=(20+8)-(4+9)=15.$

20. Multiplication. Wenn man von zwei zur Verknüpfung gegebenen Zahlen die Eine als eine zuſammengeſetzte Einheit betrachtet, woraus nach Vorſchrift der Andern eine neue Zahl gebildet werden ſoll, ſo kann man die erſte der zweiten ſubordinirt, und die vorgeſchriebene Operation, inſofern bei der Verbindung von ganzen Zahlen ein Größeres, Vielfaches zum Vorſchein kommen muß, eine Multiplication nennen. Die bei dieſer Zahlenverknüpfung als höhere Einheit zum Grunde liegende, gewiſſermaßen paſſive, Zahl heißt demgemäß der Multiplicandus, die andere beſtimmende oder active hingegen der Multiplicator, und das aus beiden, durch die Zeichen × oder . angedeuteten, Verbindung hervorgehende Reſultat das Product. Dieſes entſteht,

indem man den Multiplicator in seine Einheiten auflöst, für jede derselben den, als eine zusammengesetzte Einheit gegebenen, Multiplicandus an die Stelle setzt, und den Inhalt der dadurch gewonnenen gleichen Theile addirend zusammenzieht; z. B.

$$3.\ 5 = (1+1+1).\ 5 = 5+5+5 = 15.$$

21. Verwechselung der Factoren. Da der Multiplicandus, wenn auch in jedem besondern Falle der Anwendung eine benannte Zahl, in der Rechnung eben so wie der Multiplicator als unbenannt auftritt und die Unterscheidung beider unbenannten Zahlen nach ihrem activen und passiven Antheile an der Operation ohnehin wegfallen muß, wenn sie ohne nähere Bestimmung zur Multiplication gegeben sind, so führen sie den gemeinschaftlichen Namen Factoren, und das von ihnen abhängige Product auch wol den gleichbedeutenden Namen Factum. Daß dieses bei einer Verwechselung beider Zahlen, wodurch der Multiplicandus zum Multiplicator wird, und umgekehrt, dasselbe bleiben müsse, erkennt man leicht, wenn man die Operation mit dem in seine Einheiten aufgelösten Multiplicandus vornimmt; denn dessen Einheiten so oft setzen, als der Multiplicator vorschreibt, heißt diesen selbst setzen, wodurch beide Zahlen ihr Geschäft verwechseln. Das obige Beispiel läßt sich mithin auch so auflösen:

$$3.\ 5 = 3.\ (1+1+1+1+1) = 3+3+3+3+3 = 15.$$

22. Folgerungen. Bestehen die Factoren aus Theilen, sie mögen nun additiv oder subtractiv verbunden seyn, so braucht man diese nicht zuvor in eine Zahl zu vereinigen, sondern kann dem Begriffe von Multiplicandus und Multiplicator gemäß mit jedem einzelnen im einen Factor an allen im andern enthaltenen Theilen die Multiplication vollziehen, und den Inbegriff der Partialproducte durch Addition zu einem Totalproduct verbinden, da das Ganze immer seinen Theilen zusammengenommen gleich bleiben muß. So ist z. B.

$$(4+7-3)\ (2+3) = (4+7+3)\ 2+(4+7-3)\ 3 = 8+14-6+12+21-9 = 40.$$

oder

$$(4+7-3)\ (2+3) = 4\ (2+3)+7\ (2+3)-3\ (2+3) = 8+12+14+23-6-9 = 40.$$

Sind Multiplicandus und Multiplicator aus Factoren zusammengesetzt, so ist die Folge, in welcher man das Product aus diesen allmählig entstehen läßt, durchaus gleichgültig, weil nach dem Obigen das Resultat der Multiplication lediglich von dem Inhalte der Factoren, nicht aber davon abhängig ist, ob man den einen oder den andern als Multiplicator oder Multiplicandus ansehen will.

$$(3.5).(2.7) = (3.5)\,2.).7) = (3.7).2)\ 5\ \text{u. s. w.}$$

23. Division. Das der Multiplication entgegengesetzte Verfahren sucht aus dem gegebenen Producte und einem ebenfalls bekannten Factor den andern unbekannten aufzufinden. Hier ist es aber für den Begriff der Operation von der größten Erheblichkeit, auf den Unterschied zwischen Multiplicandus und Multiplicator Rücksicht zu nehmen und den gegebenen Factor in dieser doppelten Bedeutung zu betrachten. Als Multiplicandus ist er mit dem Producte gleichartig, und der gesuchte Multiplicator hat anzugeben, wie oft (quoties) er in jenem enthalten sey oder gesetzt werden müsse, um dasselbe hervorzubringen. Als Multiplicator hingegen ist er eine, immer unbenannte, abstracte Zahl, also mit dem, bestimmte Einheiten zählenden oder benannten, Producte nicht als gleichartig anzusehn, und hier gilt es, zu bestimmen, wie viele (quot) solcher Einheiten den unbekannten Multiplicandus bilden müssen, damit durch die vorgeschriebene Wiederholung derselben das Product zum Vorschein komme. Im ersten Falle findet also eine Vergleichung zwei gleichartiger Zahlen statt, im zweiten eine Eintheilung der als benannt zu betrachtenden in so viele gleiche Theile, als die gegebene unbenannte in sich Einheiten enthält. — Der zweite Fall ist eigentliche Division, während man den ersten eine Comparation nennen müßte. Da aber in beiden Fällen eine Zerlegung des gegebenen Products in seine beiden Factoren vorgenommen werden muß, von denen der eine als bestimmend auftritt, so sind die Benennungen Dividendus und Divisor für jenes und diesen, und der Name Quotient für den gesuchten Factor ganz angemessen. — Die gewöhnlichste Andeutung der Division ist ein : zwischen Dividendus und Divisor gestellt, zweckmäßiger aber, wegen der in der Folge daraus entspringenden Erleichterung, die Bezeichnung durch

einen Strich, der beide Zahlen von einander trennt. Mit ihrer Hülfe und der Andeutung benannter Zahlen durch einen Accent drücken wir die beiden Fälle der Division so aus:

$$\frac{24'}{8'} = 3; \qquad \frac{24'}{8} = 3'.$$

24. Folgerungen. Wenn man bei der Multiplication das Product dadurch bildete, daß man den einen Factor in seine Einheiten zerlegte und an deren Stelle den andern Factor setzte, um endlich durch Addition diese Partialproducte in einen Inbegriff zu vereinigen, so wird man bei der Umkehrung jener Operation, wo das, durch Wiederholung des einen Factors entstandene Product gegeben ist, die Menge der Einheiten, welche den unbekannten Quotienten bilden, durch eine bis zur gänzlichen Erschöpfuug des Dividendus fortgesetzte Subtraction des Divisors finden, z. B.

8	24	1+1+1=3
	8	
	16	
	8	
	8	
	8	
	0.	

Ist der Dividendus nicht ein vollkommenes Vielfaches des Divisors, so wird bei dieser wiederholten Abziehung ein Rest bleiben, in welchem, als der kleineren Zahl, jener auch nicht einmal enthalten ist, und man wird, um die Division fortzusetzen, hier zuvor eine Zerlegung in kleinere Theile der Einheit vornehmen müssen, wodurch man aus dem Gebiete der ganzen Zahlen in das der Bruchrechnung gelangt. — Hier tritt zuerst der in der Arithmetik späterhin so oft sich wiederholende Fall ein, daß wenn eine zusammensetzende Operation auch unfehlbar zu einem geschlossenen Resultate leitet, die ihr entgegengesetzte auflösende nicht in allen, sondern nur in einzelnen Fällen gleichen Erfolg hat, nämlich nur dann, wenn das als zusammengesetzt Gegebene wirklich ein solches ist, was sich bei beliebig gewählten Zahlen nur zufällig ereignen kann.

Sollte eine Verbindung von Zahlen durch Multiplication und Division gefordert werden, so erscheint die Folge der, gleichzeitig immer nur an zwei Zahlen ausführbaren, Operationen ganz

gleichgültig, und eine Aenderung des Reſultats kann nur aus der Aenderung des Inhaltes der Factoren, Dividenden und Diviſoren hervorgehen. Alſo

$$\frac{9.\ 2.\ 8}{3.\ 4} = \frac{(9.\ 2).\ 8}{(3.\ 4)} = \frac{9}{4}.\ \frac{8}{4}.\ 2 \text{ u. ſ. w.}$$

Eben ſo iſt es der Willkühr des Rechners überlaſſen, in welcher Folge er die Diviſion einer gegebenen Zahl mit mehreren Diviſoren vornehmen will, da er auf dem einen wie auf dem andern Wege der allmähligen Theilung immer zu derſelben Einheitsmenge des Quotienten gelangen wird.

Anmerkung. Dieſes ſind wiederum nur beſondere Fälle des allgemeinen Satzes, daß bei allen, auf einem gemeinſchaftlichen Princip beruhenden, Operationen die einzelnen Schritte derſelben in beliebiger Folge vorgenommen werden können, welches nicht geſtattet iſt, ſobald Zahlen weſentlich verſchiedenen Rechnungsarten unterworfen werden. Bei der Verbindung von Addition und Subtraction, oder derjenigen von Multiplication und Diviſion wird demzufolge einer beliebigen Anordnung in der Verbindung der Theile oder der Factoren nichts entgegenſtehen, während bei einer Verbindung der durchaus verſchiedenartigen Grundoperationen eine willkührlich vorgenommene Verknüpfung von Theilen und Factoren (z. B. $\frac{8\,(5-4)}{3\,(3+9)} = \frac{8.\ 5}{2\ \ 3} - \frac{4}{7}$) durchaus ungeſtattet iſt.

Zweites Kapitel.

Von den Grundoperationen in gebrochenen Zahlen.

25. Beſtandtheile des Bruchs. Es iſt ſchon oben (§. 12.) bemerkt worden, daß zur Angabe ſolcher Größen, in denen die angenommene Einheit nicht genau mehrere Mal enthalten iſt, ſie mögen nun kleiner oder größer als dieſelbe ſeyn, zwei verſchiedene Zahlen erfordert werden, von denen die eine darzuſtellen hat, was für Theile, die andere hingegen, wie viele Theile der Einheit genommen werden ſollen. Jene wird, weil ſie die Theile, worin die Einheit zerfällt werden muß, nennet, der Nenner, dieſe aber, weil ſie die Inhaltsmenge ſolcher Theile zählt, der Zähler der gebrochenen Zahl oder des Bruches genannt.

26. **Uebereinstimmung der Bruch- und Divisionsform.** Die Bezeichnungsart gebrochener Zahlen, wornach der Zähler von dem untergesetzten Nenner durch einen Strich getrennt wird, ist die, bereits oben für Division gebrauchte, und der Zähler kann mit Dividendus, der Nenner mit Divisor als gleichbedeutend angesehen werden. Um sich davon zu überzeugen, darf man nur den Fall betrachten, wo eine kleinere durch eine größe Zahl dividirt werden soll, z. B. 5 durch 7.

Als Eintheilung betrachtet, hat die Division hier auszumitteln, wie viel der siebente Theil der Zahl 5 betrage, in welcher Absicht jede einzelne Einheit des Dividendus in 7 gleiche Theile zerlegt, und von jeder ein solcher gesetzt werden muß. Dadurch gewinnt man aus:

$$5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

die Summe $\frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{5}{7}$.

Als Vergleichung hingegen hat die Division die Frage zu beantworten, wie oft die Zahl 7 in 5 enthalten sey, oder vielmehr auf welche Weise sie aus dieser gebildet werden könne? Da dieß nicht durch wiederholtes Setzen des ganzen Divisors möglich ist, so muß man aus Theilen desselben den Dividendus zu erzeugen suchen, und dieß geschieht hier, indem man von den 7 Einheiten, woraus jener besteht, 5 zusammenfaßt. — Aus beiden Ansichten der Division geht die wesentliche Uebereinstimmung der Begriffe von Nenner und Divisor, Zähler und Dividendus hervor, wornach es erlaubt seyn muß, jeden noch unberechneten Quotienten als Bruch zu schreiben, auch wenn der Dividendus größer als der Divisor, oder gar ein vollkommen Vielfaches desselben, also der Zahlenwerth des Quotienten eine ganze Zahl oder eine solche mit angehängtem Bruche ist ($\frac{7}{5}$, $\frac{8}{4} = 2$, $\frac{9}{4} = 2 + \frac{1}{4}$). Diese Arten gebrochener Zahlen werden aber als unächte Brüche von den obigen, als den ächten, unterschieden, deren Zahlenwerth immer weniger als die Einheit betragen muß.

27. **Folgerungen.** Jede ganze Zahl kann demnach in der Form eines Bruches auf unzählig viele Arten angegeben werden. Denn da den Inhalt des Bruchs die im Zähler enthaltene Menge der im Nenner benannten Theile bestimmt, so wird man bei der willkührlichen Zahl eines Nenners

den Zähler immer so einrichten können, daß jener in ihm so oft enthalten ist, als die in Form eines Bruches darzustellende ganze Zahl Einheiten enthält. — Dieß geschieht aber dadurch, daß man sie durch die, zum Nenner gewählte, Zahl zugleich multiplicirt und dividirt, da durch diese beiden, einander aufhebenden Operationen, nicht der Inhalt, sondern nur die Form geändert wird. So ist z. B.

$$5 = \frac{7.5}{7} = \frac{35}{7}; = \frac{6.5}{6} = \frac{30}{6}; = \frac{9.5}{9} = \frac{45}{9} \text{ u. s. w.}$$

Umgekehrt können aus einem gegebenen Bruche die einander aufhebenden Factoren und Divisoren ausgeschieden und der Bruch auf seinen einfachern Zahlenwerth gebracht werden, z. B. $\frac{15}{5} = \frac{3.5}{5} = 5$, $\frac{8}{12} = \frac{2.4}{4.3} = \frac{2}{3}$.

28. Rechnungsarten mit Brüchen. Bei der Anwendung der Grundoperationen auf gebrochene Zahlen müssen ihre allgemeinen Grundsätze und Regeln dem Begriffe und der Darstellung eines Bruches angepaßt werden. Der besondere Fall, wo Brüche mit ganzen Zahlen verknüpft werden sollen, ist zwar in dem allgemeinern einer Verbindung durchgängig gebrochener Zahlen begriffen, da jede ganze Zahl leicht in Bruchform umgesetzt werden kann. Die Einsicht in die Bruchrechnung gewinnt aber an Deutlichkeit, wenn man beide Fälle abgesondert betrachtet.

29. Addition ganzer und gebrochener Zahlen. Wo eine ganze Zahl mit einem Bruche zusammengezählt werden soll, da erfordert die erste Bedingung aller Zusammenordnung — Gleichartigkeit der Theile — daß man die ganze Zahl als einen Bruch von demselben Nenner darstelle, indem man sie durch diesen zugleich multiplicirt und dividirt. Die Summirung der beiden, alsdann gleichbenannten, Brüche ist erst auf diese Weise möglich geworden und besteht darin, daß man die Menge derjenigen Theile zusammenaddirt, welche in beiden Brüchen gezählt werden. Die Regel der Addition fordert hier also zuerst die Verwandlung der ganzen Zahl in einen Bruch von demselben Nenner, und dann die Summirung der Zähler.

$$7 + \tfrac{3}{4} = \frac{4.7}{4.} + \tfrac{3}{4} = \frac{28}{4} + \tfrac{3}{4} = \frac{28+3}{4} = \frac{31}{4.}$$

30. Addition der Brüche. Die Vereinigung zweier Brüche von verschiedenem Nenner verlangt nach der Bedingung der Gleichartigkeit ihre vorgängige Verwandlung in solche Brüche, worin Theile derselben Art, also gleiche Nenner, vorkommen. Eine solche Verwandlung wird aber dadurch immer möglich, daß man jede Art von Theilen in kleinere zerfällen, also den Nenner eines Bruches auf unzählige Weise durch Multiplication abändern kann, wobei der Inhalt desselben ungeändert bleiben wird, wenn man den Zähler durch denselben Factor multiplicirt, d. h. um eben so viel mehr Theile zählt, als man dieselben kleiner angenommen hat. — Hiernach bedarf es nur einer gleichzeitigen Multiplication im Zähler und Nenner beider zu addirenden Brüche mit ihren gegenseitigen Nennern, deren Product den gemeinschaftlichen Nenner ergeben wird, um durch Addition der Zähler die Summe zu erhalten.

$$\frac{5}{7}+\frac{2}{3}=\frac{3.5}{3.7}+\frac{7.2}{7.3}=\frac{3.5+7.2}{3.7}=\frac{15+14}{21}=\frac{29.}{21.}$$

31. Subtraction ganzer und gebrochener Zahlen. Die Subtraction, wo wir anzugeben haben, wie viele gleichartige Theile entweder zu dem gegebenen Subtrahendus hinzuaddirt werden müssen, um den Minuendus zu erzeugen, oder umgekehrt von diesem übrig bleiben, wenn man die Theile des Subtrahendus von denen des Minuendus abzieht, erfordert eine gleiche vorläufige Verwandlung der Zahlen, wie die Addition, und giebt daher die Regel: man bringe die ganze Zahl auf die Benennung des Bruches und subtrahire dann die Zähler, deren Differenz, mit dem gemeinschaftlichen Nenner versehen, diejenige der gegebenen Zahlenwerthe ist.

$$6-\frac{7}{4}=\frac{46.}{4}-\frac{7}{4}=\frac{4.6-7}{4}=\frac{24-7}{4}=\frac{17}{4}$$

$$\frac{23}{3}-5=\frac{23}{3}-\frac{5.3}{3}=\frac{23-5.3}{3}=\frac{23-15}{3}=\frac{8}{3}$$

32. Subtraction der Brüche. Auch wenn ein Bruch von einem andern abgezogen werden soll, mit dessen Nenner der seinige nicht übereinstimmt, muß dieselbe vorläufige Umformung, wie bei ihrer Addition statt finden. Die Subtraction wird, nachdem man Minuendus und Subtrahendus

des Zählers (z. B. $\frac{8}{10} : 3 = \frac{2}{10}$); allgemeiner aber durch Verkleinerung der angegebenen Theile vermöge der Multiplication des Nenners, während man den Zähler ungeändert läßt, (z. B. $\frac{8}{10} : 4 = \frac{8}{40}$).

Soll im Gegentheil die ganze Zahl durch einen Bruch dividirt werden, so kann man die Division, als Vergleichung betrachtet, dadurch ausführen, daß man jene ganze Zahl mit ihrem Divisor auf gleiche Benennung bringt, weil es dann bei durchaus gleichartigen Theilen nur der Vergleichung ihrer Zähler bedarf.

$$4 : \frac{5}{7} = \frac{7.4}{7} : \frac{5}{7} = \frac{28}{7} : \frac{5}{7} = \frac{28}{5}.$$

Das hieraus entspringende Verfahren der Division besteht also in Umkehrung des als Divisor gegebenen Bruches und Multiplication des Dividendus:

$$4 : \frac{5}{7} = 4 \cdot \frac{7}{5} = \frac{28}{5};$$

37. Division der Brüche. Nach einer solchen vorläufigen Verwandlung der Brüche und dadurch bewirkten Uebereinstimmung der Nenner wird auch das Verfahren der Division eines Bruchs durch einen andern begreiflich; denn als eine Vergleichung von Dingen einerlei Art fordert sie dann nur die Division der Zähler.

$$\frac{4}{7} : \frac{5}{6} = \frac{6.4}{6.7} : \frac{5.7}{6.7} = \frac{24}{42} : \frac{35}{42} = \frac{24}{35};$$

Auch hier schreibt die Rechnungsregel sehr einfach Multiplication mit dem umgekehrten Divisor vor.

$$\frac{4}{7} : \frac{5}{6} = \frac{4}{7} \cdot \frac{6}{5} = \frac{24}{35}.$$

38. Folgerungen. Der Inhalt eines Bruches, zugleich von Zähler und Nenner abhängig, ändert sich, wenn an einem von beiden eine Aenderung vorgenommen wird, also auf zwiefache Weise. Er nimmt zu mit einer Vermehrung des Zählers, der die Menge der Einheitstheile in sich begreift, oder mit der Verminderung des Renners, weil dadurch diese Theile an sich größer werden. Eine Abnahme des Bruchwerthes wird hingegen durch diejenige des Zählers oder durch die Vermehrung des Nenners bewirkt, weil dieser alsdann kleinere Theile angiebt, als zuvor. Eine durch Mul-

tiplication oder Division im Zähler und Nenner mit derselben Zahl zugleich vorgenommene Vermehrung oder Verminderung, wodurch die Art der gezählten Einheitstheile zugleich mit ihrer Anzahl geändert wird, läßt den Werth des Bruches bestehen, so daß man, wie es zur Vereinigung und Vergleichung mehrerer Brüche durchaus erforderlich ist, sie unbeschadet ihres Inhalts auf unzählig viele Arten schreiben oder sie auf unzählig viele Benennungen bringen kann. Eine besondere Aenderung dieser Art besteht darin, daß man eine Zahl durch zwei Brüche multiplicirt, deren einer durch Umkehrung des andern entstanden ist, weil das Product solcher Brüche (z B. $\frac{3}{7}\cdot\frac{7}{3}$) immer die, als Factor keine Aenderung hervorbringende, Einheit ist. Hierauf gestützt könnte man die Regel der Division mit Brüchen auch auf diese Weise erläutern:

$$\frac{4}{\left(\frac{3}{7}\right)} = \frac{\frac{7}{3}\cdot\frac{3}{7}\cdot(4)}{\left(\frac{3}{7}\right)} = \frac{7}{3}\cdot 4;$$

$$\frac{\left(\frac{2}{5}\right)}{\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\left(\frac{2}{5}\right)}{\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{4}{3}\cdot\frac{2}{5}.$$

Anmerkung. Da jeder ächte Bruch als Factor ein kleineres Product, als Divisor einen größeren Quotienten in Beziehung auf Multiplicandus und Dividendus giebt, so ist es unrichtig, die Multiplication ein wiederholtes Addiren, und die Division ein wiederholtes Subtrahiren zu nennen, wodurch der allgemeine, auf Zahlen aller Art anwendbare Begriff dieser Operationen gänzlich verdreht wird.

39. Vereinfachung der Brüche. Die einfachste Darstellung eines Bruchwerthes, der durch Zähler und Nenner gegeben ist, worin zum Theil gleiche Factoren vorkommen, geschieht durch Ausscheidung derselben, d. h. durch Division beider Zahlen mit dem größten ihnen gemeinschaftlichen Factor, wodurch der Bruch in den kleinsten (nicht ferner durch dieselbe Zahl divisiblen) Zahlen ausgedrückt seyn wird. So ist in dem Beispiele:

$$\frac{168}{756} = \frac{3\cdot 4\cdot 7\cdot 2}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 9} = \frac{2}{9}$$

der größte gemeinschaftliche Factor das Product der Zahlen 3. 4. 7 = 84, mit welchem im Zähler und Nenner dividirend wir $\frac{168}{252}$ auf die einfachere, gleichbedeutende, Form $\frac{2}{3}$ bringen.

Da aber jener größte gemeinschaftliche Divisor von Zähler und Nenner eines gegebenen Bruches selten auf den ersten Blick erkennbar ist, so muß ein allgemeines Verfahren für seine Ausmittelung gesucht werden, und hiezu gelangen wir durch folgende Bemerkung.

Wäre der Nenner genau ein Vielfaches des Zählers, so würde dieser selbst der größte gemeinschaftliche Divisor seyn ($\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$), ist er es aber nicht, so darf man ihn doch wenigstens als ein Vielfaches des Zählers mit angehängtem Reste betrachten $\left(\frac{8}{28} = \frac{8}{24+4} = \frac{8}{3.8+4}\right)$. Dann hat die Frage nach dem gemeinschaftlichen Divisor nur diesen Rest und den Zähler in Betracht zu ziehen, weil derselbe in dem Vielfachen des Zählers ohnehin enthalten seyn muß. Ist nun der Zähler genau ein Vielfaches des Restes, so ist dieser der gesuchte größte Divisor der beiden gegebenen Zahlen. Sollte hingegen wieder ein Rest bleiben, so kann man wie vorhin verfahren, und gelangt auf diesem Wege durch eine Division, die bis zum völligen Verschwinden der Reste fortgesetzt werden muß, endlich zu der gesuchten Zahl, die in dem Falle, daß keine Vereinfachung möglich oder kein gemeinschaftlicher Factor vorhanden war, die Einheit seyn wird. — Zahlen dieser Art werden relative Primzahlen genannt im Gegensatz der absoluten, welche nicht allein mit einer gegebenen andern Zahl keinen gemeinschaftlichen Factor haben, sondern überhaupt nicht in Factoren zerlegt werden können, wie z. B. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17. (Ueber die Theilbarkeit der Zahlen durch gegebene Divisoren s. die Betrachtungen in §§. 211—215.)

Drittes Kapitel.

Die Grundoperationen mit widerstreitenden Zahlen.

40. Widerstreitende Größen. Es giebt bei der Vergleichung zweier Größen, woraus ihr Uebereinstimmendes und Abweichendes erkannt werden soll, außer der Rücksicht

auf Qualität und Quantität oder Art und Menge der Theile eine bisher noch ganz vernachlässigte. Man hat nämauch die Beziehung oder Relation, worin Größen zu einander stehen, zu beachten, da sie durchaus gleichartig und gleichen Inhalts, und dennoch in ihrer gegenseitigen Beziehung zu einander verschieden seyn können, wie dieses z. B. bei zwei gleichen Bewegungen der Fall ist, wovon die eine in der entgegengesetzten Richtung der andern Statt findet. Die Grundoperationen der Arithmetik, deren Geschäft in den einfachsten Verknüpfungen aller überhaupt vereinbaren Zahlen besteht, werden also auch jene widerstreitende oder einstimmige Relation nicht außer Acht lassen dürfen, in welcher die gegebenen Größen sich befinden können. So lange diese Rücksicht gar nicht zur Sprache kommt, wie es in den vorigen Capiteln der Fall war, werden die Zahlen, mit denen man rechnet, stillschweigend als einstimmig angenommen.

41. Begriff des Positiven und Negativen. Da eine Größe nur in Beziehung auf eine andere, und diese umgekehrt in Beziehung auf jene widerstreitend genannt werden kann, so ist die, durch dieses Wort ausgesprochene, Eigenschaft eine gegenseitige der beiden Größen und mithin keiner in Ansehung derselben ein Vorrang zuzugestehen. — Doch muß man allerdings bei ihrer Betrachtung mit einer den Anfang machen oder sie zuerst setzen und nennt sie in sofern die positive, im Gegensatze der andern, ihr widerstreitenden, die man als die in der Vorstellung aus jener ersten abgeleitete und aufhebende mit dem Namen einer negativen Größe belegt. Es ist indessen eben so erlaubt, diese negative als ursprünglich gesetzte Größe zu betrachten oder positiv zu nennen, wodurch die andere von selbst zur negativen wird.*) Man sieht also, daß

*) Unter allen Beispielen, deren man sich zur Erläuterung dieser Begriffe bedienen kann, giebt es keines, das unglücklicher gewählt wäre, als das gewöhnlich gebrauchte von Vermögen und Schulden, weil hier der Begriff von Vermögen in der That eine natürliche Priorität hat, da man den von Schulden nicht ursprünglich feststellen kann. Die bei Weitem schlimmste Eigenschaft dieses Beispiels besteht aber darin, daß es die unsinnige Erklärung von negativen Zahlen, die weniger als Null betragen, zu rechtfertigen scheint.

die Vorstellung einer negativen Zahl mittelbar in uns entsteht, indem wir von der Einheit, welche der positiven zum Grunde liegt, das Widerstreitende, sie Aufhebende uns denken und daraus durch Wiederholung der Theilung eine ganze oder gebrochene negative Zahl entstehen lassen.

42. Bezeichnungsart. Diese gegenseitige Beziehung der Größen an den Zahlen zu bezeichnen, welche blos den innern Gehalt darstellen, benutzt man zugleich die Operationszeichen der Addition und Subtraction, die ihrer Bedeutung nach sich aufheben, indem man die positiven Zahlen durch +, die negativen durch — andeutet, pflegt aber bei jenen das Vorzeichen als überflüssig oft wegzulassen und deshalb unter einer, mit keinem Zeichen versehenen Zahl immer eine positive zu verstehen. Bei gebrochenen Zahlen kann sich die Verzeichnung nur auf den Zähler beziehen, da der Nenner immer dieselben Theile der Einheit bezeichnet, sie mögen nun in dem einen oder dem andern Sinne (½ Meile vor- oder rückwärts) genommen werden sollen.

43. Addition. Die Verbindung solcher Zahlen, die in ihrer Bezeichnung einstimmig sind, wird in der gewöhnlichen Summirung bestehen und die Summe die gemeinschaftliche Bezeichnung ihrer Theile erhalten.

$$4 + 7 = 11; \quad -9 - 5 = -14.$$

Sind die zu vereinigenden Zahlen hingegen widerstreitend, so müssen sie sich zum Theil oder ganz aufheben und nur der Ueberschuß der größern Menge erscheint hier als ihre Summe:

$$-9 + 5 = -4; \quad -6 + 6 = 0; \quad -7 + 24 = +17.$$

Bei der Verbindung einer größern Zahlenmenge sind die positiven sowol, als die negativen abgesondert in einer Summe zu vereinigen und dann in der größern so viele Einheiten zu vernichten, als die kleinere enthält.

$$7 + 5 - 6 + 2 - 3 = (7 + 5 + 2) - (6 + 3) = 14 - 9 = 5.$$

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{3} - \frac{5}{8} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right) - \left(\frac{5}{8} + \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{38-23}{24} = \frac{15}{24}.$$

44. Subtraction. Soll von den beiden erzeugenden Theilen einer Summe, die nebst dem einen gegeben ist,

der andere noch unbekannte, vorläufig durch das Zeichen x angedeutet, ausfindig gemacht werden, so hat man ihn mit Rücksicht auf die Bezeichnung so zu wählen, daß nach etwaiger Aufhebung widerstreitender Einheiten die (als Minuendus gegebene) Summe wirklich zum Vorschein komme:

$x+2=7;$	$x-2=-7;$	$x+8=-4;$
$x=5$	$x=-5.$	$x=-12.$
$x+8=4;$	$x-8=-4;$	$x-8=4;$
$x=-4$	$x=+4.$	$x=+12.$

Will man hingegen die Subtraction als eine wirkliche Abziehung betrachten, so kann man den Subtrahendus zugleich positiv und negativ in den Minuendus bringen, wodurch an dessen Inhalte nichts geändert wird, und alsdann das Abzuziehende wirklich aus ihm hinwegnehmen:

$+4(+8-8)$	$-4(+8-8)$
$+8$	$+8$
$+4-8=-4.$	$-4-8=-12$
$-4(+8-8)$	$+4(+8-8)$
-8	-8
$-4+8=+4.$	$+4+8=+12$

Die aus diesen Betrachtungen sich ergebende einfache Regel der Subtraction fordert, daß man den Subtrahendus mit veränderten Zeichen zum Minuendus addire, um die Differenz beider Zahlen zu erhalten.

$$\begin{array}{r} 4+5-9+6-8 \\ -7+2+4-7-5 \\ + \quad - \quad - \quad + \quad + \\ \hline 11+3-13 \quad +13-3. \end{array}$$

45. Multiplication. Bei der Verbindung von Factoren zu einem Producte muß ebenfalls die Bezeichnung derselben in Anschlag kommen, wenn man neben dem Inhalte auch die Bedeutung desselben kennen lernen will. So ist es, wenn die Richtung nach Norden als die positive angenommen wird, nicht genug, zu wissen, daß ein Bote, der in einem Tage 5 Meilen geht, in 3 Tagen 15 Meilen zurückgelegt habe, sondern es muß dabei ausdrücklich angegeben werden, in welchem Sinne die täglichen 5 Meilen durchlaufen worden, und wie mithin die Zahl 15 des Products zu verstehen sey. Die Art und Weise aber, wie aus dem Multiplicandus das Product sich bildet,

16—4, 3. 4, 2. 6, ½ u. ſ. w. entſtanden ſeyn kann), von der andern Seite aber auch, um den Fall, wovon die Rede iſt, in Zeichen allgemein darzuſtellen und nicht in einem einzelnen, demſelben untergeordneten Beiſpiele, wie bisher geſchehen, damit die urſprünglichen Betrachtungen der Arithmetik nicht durch zu frühzeitige Einmiſchung einer noch ungewohnten Zeichenſprache erſchwert würde.

Zu dieſer Abſicht bieten ſich uns nun ſehr bequem die kleinen und größen Buchſtaben verſchiedener Alphabete, (z. B. des lateiniſchen, griechiſchen und deutſchen dar, mit denen wir jede beliebige Größe andeuten können, ohne uns auf die beſtimmte Angabe ihrer Einheitstheile einzulaſſen. Hierdurch wird die Einſicht in die Abhängigkeit verbundener Zahlen ſehr erleichtert, indem man in dem Reſultate der Rechnung jedesmal noch den einzelnen Beſtandtheil deutlich wahrnimmt, und alſo die Art und Weiſe erkennt, wie er zu deſſen Bildung mitgewirkt hat.

48. Addition. Sind a, b, c, d . . n zur Vereinigung gegebene gleichartige Zahlenwerthe, die zum Theil poſitiv, zum Theil negativ ſeyn können, ſ das Zeichen ihrer Summe, ſo iſt die allgemeine Andeutung der Addition:

$$a - b + c + d - e + f - g + n = S.$$
$$\text{folglich } (a+c+d+f+n) - (b+e+g) = S.$$

Eine Aenderung des Werthes von S wird nothwendig herbeigeführt, wenn man irgend einen der Theile vermehrt oder vermindert. Sollen einzelne dieſer Theile mehrfach genommen werden, ſo geſellen ſich zu den Buchſtaben noch Zahlen-Factoren, die man Coefficienten nennt, und erſcheint unter den zu addirenden Größen derſelbe Buchſtabe wiederholt, ſo darf man nur ſeine Coefficienten in eine Summe zuſammenziehen, um das Vielfache jenes Buchſtabens überhaupt anzugeben.

$$\begin{array}{r} 4a + 7b - 3c - d + 9e \\ -2a + 5b + 7c - 4d - 6e \\ a - 3b - 3c + 7d - 3e \\ \hline S = 3a + 9b + c + 2d \end{array}$$

Eine Vereinigung gebrochener Zahlen, allgemein angedeutet durch $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$ u. ſ. w. wird nach vorgängiger Bewir-

lung einer gleichen Benennung durch Multiplication mit den einzelnen Nennern durch die Addition der Zähler geleistet:

$$\frac{adf}{bdf}+\frac{bcf}{bdf}+\frac{bde}{bdf}=\frac{adf+bcf+bde}{bdf}$$

49. Subtraction. Soll ein Größenausdruck in Buchstaben von einem andern abgezogen werden, (A—B=D) so wird nur dann eine wirkliche Rechnung mit denselben statt finden können, wenn im Subtrahendus dieselben Buchstaben, wie im Minuendus vorkommen, oder in beiden Gleichnamiges vorhanden ist. Nach Verwandlung der Vorzeichen in den Gliedern des Subtrahendus addirt man dann (der für die Addition gegebenen Vorschrift gemäß) die Coefficienten der gleichen Buchstaben zusammen, um die Differenz zu erhalten. Sei z. B.:

$$\begin{array}{r} A=3a-7b+4c-5d+e \\ B=2a+2b-9c-7d-e \\ \hline - \quad - \quad + \quad + \quad + \\ \hline D=a-9b+13c+2d+2e \end{array}$$

Die Subtraction der Brüche wird nach den uns bekannten Regeln in Buchstaben folgendergestalt angedeutet:

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}-\frac{bc}{bd}=\frac{ad-bc}{bd};\ \frac{a}{b}-\left(-\frac{c}{d}\right)$$
$$=_{bd}-\left(\frac{-bc}{bd}\right)=\frac{ad+bc}{bd}$$

50. Multiplication. Denkt man sich unter p ein aus den Factoren q und r zusammengesetztes Product, so ist die allgemeine Andeutung der Multiplication in dem Ausdrucke $q.r=p$ enthalten, der, jenachdem man die Factoren, als positive oder negative ganze oder gebrochene Zahlen ersetzt, folgende einzelne Fälle in sich schließt:

$$q.(+r)=qr;\ q.(-r)=qr;\ (-q)\,(+r)=-qr;$$
$$(-q).(-r)=+qr$$

und wenn $q=\frac{a}{b}$, $r=\frac{c}{d}$, gesetzt wird:

$$\frac{a}{b}.\left(\frac{+c}{d}\right)=\frac{+ac}{bd};\ \frac{a}{b}.\left(\frac{-c}{d}\right)=\frac{-ac}{bd};\ \left(\frac{-a}{b}\right).\left(\frac{c}{d}\right)$$
$$=\frac{-ab}{cd};\ \left(\frac{-a}{b}\right).\left(\frac{-c}{d}\right)=\frac{+ac}{bd}$$

jeder beliebigen Zahl zu gelten, sie möge um mehr oder weniger als die Einheit betragen, und im positiven oder negativen Sinne genommen seyn. Nach dieser Ansicht aber fallen Addition und Subtraction (als die coordinirenden Operationen) zusammen in der Form

$$A + B = S,$$

wo unter A, B und S positive oder negative Zahlen zu verstehen sind; Multiplication und Division aber (als die subordinirenden Operationen) in dem allgemeinen Ausdrucke:

$$A . B = P,$$

wo A, B und P ganze oder gebrochene Zahlen mit positiver oder negativer Vorzeichnung bedeuten können. Doch darf man diese Ansicht der Subtraction und Division als besonderer Fälle der Addition und Multiplication nicht als ursprünglich, sondern nur als abgeleitet betrachten, da sie allein aus der Darstellungsweise durch Buchstaben entspringt und den Begriff des Widerstreits nothwendig voraussetzt. Ihre Uebereinstimmung mit der ursprünglichen Idee einer Umkehrung der synthetischen Operationen liegt nämlich darin, daß Theil oder Factor nicht geradezu, sondern im widerstreitenden Sinne der Verknüpfungsart genommen werden, die Zahl 4 z. B. im einen Falle als -4, im andern als $\frac{1}{4}$ sich mit 3 verbindet, und so die Ausdrücke:

$$A + B = 3 + (-4) = 3 - 4.$$
$$A . B = 3 . \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4}$$

das Umgekehrte von Addition und Multiplication darstellen müssen, da der Theil oder Factor B, der mit A verbunden werden sollte, auf eine der gewöhnlichen Bedeutung entgegengesetzte Weise genommen wurde.

Fünftes Kapitel.

Die einfachen Gleichungen.

53. **Anwendung der Grundoperationen.** Eine Verbindung der Auflösung von Zahlen durch Addition, Subtraction, Multiplication oder Division; wozu entweder eine einzelne dieser Operationen oder mehrere zusammengenommen erfordert wurden, finden wir in allen gewöhnlichen Rechnungsaufgaben des gemeinen Lebens, z. B. der Zusammensetzung verschiedener Geldsummen, der Vergleichung von Einnahme und Ausgabe, der Verwandlung einer Münzsorte in die andere, der Vertheilung einer Summe u. s. w., wozu der erste Rechenunterricht die praktische Anweisung ertheilt und erleichternde Kunstgriffe und mechanische Regeln lehrt, deren Kenntniß und Einübung hier vorausgesetzt werden muß.

54. **Gleichungen.** Man könnte alle jene Fälle der Rechnung, in denen eine Summe, Differenz, ein Product oder Quotient gefunden werden soll, in einer Gleichung ansetzen, indem man die unbekannte Größe vorläufig durch einen Buchstaben bezeichnet, z. B.:

$3 + 4 + 7 = s$; $\quad (7 + 6 + 2) - (3 + 5) = d$;

$3 \cdot 8 = p$; $\quad \frac{24}{3} = q$:

und wirklich ist man gezwungen, sich einer solchen vorläufigen Einführung der unbekannten Größe durch einen Buchstaben (wozu man die letzten des Alphabets x, y oder z, zu wählen pflegt), zu bedienen, wenn diese Größe in der Aufgabe mit andern gegebnen Zahlen verwickelt oder verflochten erscheint, wie z. B. in der nachstehenden:

Drei Personen legen gleiche Capitalien in einem gemeinschaftlichen Handelsgeschäfte an, und gewinnen damit im Verlaufe eines Jahres 20 pr. Ct., nehmen aber dann Jeder die Hälfte seines vermehrten Capitals und außerdem 1000 ℳ. für besondere Unternehmungen aus jenem Geschäfte, wodurch der gemeinschaftliche Fond desselben auf 12750 ℳ. vermindert wird. Wie viel betrug demnach das eingelegte Capital eines Jeden?

Hier und in ähnlichen Fällen fordert die Lösung der Rechnungsaufgabe, daß man das noch Unbekannte symbolisch sogleich unter ihre Bestandtheile aufnehme und die in Worten ausgesprochenen Umstände und Bedingungen in die Zeichensprache der Arithmetik übertrage, indem man denselben Inhalt auf eine zwiefache, der Form nach ganz verschiedene Weise darzustellen oder durch den doppelten Ausdruck des nämlichen Größeninhalts eine Gleichung zu bilden sucht.

Bezeichnet man z. B. in der oben stehenden Aufgabe das gesuchte Capital mit x, so wird seine Vermehrung um 20 p. C. durch $x + \frac{20}{100} x$ oder $x + \frac{1}{5} x$, die Hälfte davon durch $\frac{1}{2}(x + \frac{1}{5} x)$, die Verminderung derselben um 1000 Thaler durch $\frac{1}{2}(x + \frac{1}{5} x) - 1000$, das dreifache dieses Restes durch $3(\frac{1}{2}(x + \frac{1}{5} x) - 1000)$ und die Bedingung, daß derselbe noch 12750 Thaler betragen solle, endlich durch die Gleichung:

$$3(\tfrac{1}{2}(x + \tfrac{1}{5} x) - 1000) = 12750.$$

ausgedrückt werden, worin die unbekannte Zahl mit den gegebenen noch verflochten ist, so daß, um ihren Werth zu finden, eine Entwickelung des Ausdrucks nöthig erscheint:

55. Auflösung einer Gleichung. Diese Entwickelung, in Trennung und Zusammenziehung einzelner Glieder, Absonderung des Unbekannten und seiner Bestimmung durch die gegebenen Zahlenwerthe bestehend, heißt die Auflösung der Gleichung und wird ohne Mühe durch die Anwendung der arithmetischen Grundoperationen geleistet, sobald man, wie im obigen Beispiele, nur mit einfachen Gleichungen oder solchen des ersten Grades, in denen die unbekannte Größe nicht mit sich selbst multiplicirt vorkommt, zu thun hat.

Sie beruhet dann lediglich auf einer Umgestaltung der gegebenen Gleichung, die durch die Umkehrung der angedeuteten Operationen jedesmal möglich ist. Denn die Zahlenverknüpfung $a + b = s$ ist mit $a = s - b$, und $q \cdot r = p$ mit $q = \frac{p}{r}$ wesentlich einerlei, nur in dem einen Falle als Verbindung, in dem andern als Auflösung dargestellt, und ein Uebergang aus einer Form in die andere, von der Addition zur Subtraction, von der Multiplication zur Division, und umgekehrt, sehr leicht zu bewerkstelligen. — Man darf nur den

additiven Theil als Subtrahendus, den Factor als Divisor, und umgekehrt, von der einen Seite der Gleichung auf die andere hinüberschaffen oder transponiren, oder auf beiden Seiten addirend, subtrahirend, multiplicirend und dividirend ein und dasselbe vornehmen, um eine solche Umgestaltung zu bewirken, wobei die Zahlenverknüpfung selbst nicht im mindesten, sondern nur ihre Schreibart oder Darstellung verändert wird.

56. Regeln der Auflösung. Die Entwickelung der unbekannten Größe aus ihrer Verknüpfung mit den gegebenen Zahlenwerthen hebt damit an, daß man eine angedeutete Multiplication mit mehrtheiligen Factoren wirklich vollzieht, und etwa vorhandene Divisoren durch Multiplication sämmtlicher Glieder fortschafft; dann werden durch Transposition auf der einen Seite die sämmtlichen Glieder, welche die unbekannte Größe enthalten, auf der andern die aus bloß bekannten Größen bestehenden Glieder zusammengestellt. Der letzte Schritt besteht in einer Zusammenziehung der Zahlencoefficienten, welche die unbekannte Größe multipliciren, und in der Division mit deren Summe, weil sie dadurch ganz isolirt und in gegebenen Zahlenwerthen ausgedrückt wird.

Will man sich von der Richtigkeit der Auflösung überzeugen, so muß man den berechneten Werth der unbekannten Größe an die Stelle ihres Symbols in die ursprüngliche Gleichung setzen und untersuchen, ob dieselbe dann zu beiden Seiten identische, d. h. genau dieselben Resultate giebt.

57. Anwendungen. Um die hier ausgesprochenen Regeln der Auflösung an verschiedenen Gleichungen zu verdeutlichen, mag hier noch eine Reihe von Aufgaben und der stufenweise Gang des Verfahrens in wirklich ausgeführter Rechnung folgen.

1. Von zwei Personen ist die eine 36, die andere 24 Jahre alt. Wann ist die ältere dreimal so alt als die jüngere gewesen? —

Gleichung. $36 - x = 3\,(24 - x)$

Auflösung. $36 - x = 72 - 3x$; $3x - x = 72 - 36$.

d. i. $2x = 36$, und $x = 18$.

2. Ein Wasserbehälter kann durch drei Röhren gefüllt werden: durch die erste in 20, durch die zweite in 50 und

durch die dritte in 75 Minuten. In wie vielen Minuten also durch alle drei zugleich? (Man betrachte die ganze Wassermasse hier als die Einheit, so ergießt sich in jeder einzelnen Minute aus den drei Röhren $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{50}$ und $\frac{1}{75}$ derselben.)

Gleichung. $\frac{1}{20}x + \frac{1}{50}x + \frac{1}{75}x = 1.$

Auflösung. $75.50\,x + 20.75\,x + 20.50\,x = 20.50.75.$

$3750\,x + 1500\,x + 1000\,x = 75000.$

$6250\,x = 75000$

$$x = \frac{75000}{6250} = 12.$$

3. In welchem Augenblicke der sechsten Stunde des Tages stehen die Zeiger A und B einer Uhr genau übereinander?

(Da sich B 12 mal so schnell, als A bewegt, so wird der Bogen, den er beschreiben muß, um A zu erreichen, 12 mal so groß seyn, als der kleine, den dieser von der Ziffer 5 an durchläuft, wo er bereits einen Weg von 25 Minuten vor jenem voraus hatte.

Gleichung. $12x = 25 + x.$

Auflösung. $12x - x = 25$; oder $11x = 25.$

$$x = \frac{25}{11} = 2\frac{3}{11}.$$

Der Augenblick des Zusammentreffens beider Zeiger ist also $= 5$ St. $2\frac{3}{11}$ Min. oder 5 St. 2 Min. $16\frac{4}{11}$ Sec.

4. Wann treffen sich zwei Personen, von denen A 4 Stunden früher abgereist und in 3 Stunden 2 Meilen zurücklegt, während B in 4 Stunden 3 Meilen macht.

(Hier beträgt der Weg von A in einer Stunde $\frac{2}{3}$, der von B hingegen $\frac{3}{4}$ Meilen.)

Gleichung. $\frac{2}{3}(x + 4) = \frac{3}{4}x$

Auflösung. $8(x + 4) = 9x$, oder $8x + 32 = 9x.$

$x = 32.$

5. Welches ist der allgemeine Ausdruck für x, wenn man unbestimmt setzt, daß A um m Stunden früher abgereist sey und in q Stunden r Meilen mache, während B in p Stunden s Meilen zurücklege?

Gleichung. $\frac{r}{q}(x + m) = \frac{s}{p}m.$

Auflösung. $pr(x + m) = qsx$, oder $prx + prm = qsx$

$(qs - pr)x = prm.$

$$x = \frac{prm}{qs - pr}.$$

6. Käme zu den Umständen der 4ten Aufgabe noch der neue, daß B aus einem, um 5 Meilen rückwärs liegenden Orte dem A nachreiste, so würde die Aufgabe folgendermaßen abzuändern seyn:

Gleichung. $\frac{2}{3}(x+4)+5=\frac{3}{4}x$

Auflösung. $8(x+4)+12.5=9x$ oder $8x+32+60-9x$. $x=(60+32)=92$.

7. Erweitert man auf gleiche Weise die 5te Aufgabe durch die Annahme, daß die beiden Punkte der Abreise um A Meilen von einander entfernt liegen, so gelangt man auf folgende Art zum allgemeinen Ausdrucke der Zeit:

Gleichung. $\frac{r}{q}(x+m)+t=\frac{s}{p}x$

Auflösung. $pr(x+m)+pqt=qsx$

$prx+prm+pqt=qsx$

$prm+pqt=(qs-pr)x$

$x=\frac{prm+pqt}{qs-pr}$.

58. Vorzeichen im Resultat. In den meisten Fällen wird der Werth der unbekannten Größe, zu welchem die Auflösung leitet, eine positive Größe seyn, so daß seine Vorzeichnung nicht in Betracht gezogen zu werden braucht. Doch können auch die in der Aufgabe ausgesprochenen Umstände von der Art seyn, daß das Resultat eine negativ bezeichnete Zahl ist, vielleicht gar wider unser Erwarten, wodurch uns dann die Rechnung belehrt, daß das, was wir suchen, in dem unserer Ansicht entgegengesetzten Sinne genommen werden müsse, also eine in der Frage selbst liegende irrige Voraussetzung verbessert und vielleicht eine Widersinnigkeit darin nachweist. So werde z. B. in der 7ten der vorstehenden Aufgaben $p=7$ St., $q=3$ St., $r=2$ M., $m=6$ M., $t=5$ M., $s=4$ M. gesetzt und die Zeit gesucht, in welcher B die Person A unter diesen besondern Umständen erreichen muß? — Die Einführung der hier angenommenen speciellen Werthe in den allgemeinen Ausdruck des Resultats giebt:

$$x=\frac{7.2.6+7.3.5}{3.4-7.2}=\frac{252+105}{12-14}=\frac{357}{-2}=-178\tfrac{1}{2}.$$

Hier sagt uns der negative Werth von x, daß die Personen bei der Fortsetzung ihres Wegs in der vorgestellten Richtung sich niemals treffen können, sondern, wenn sie schon seit unbestimmter Zeit einander gefolgt sind, in der entgegengesetzten Richtung und 178½ Stunden vor dem Augenblick der Reise, den wir als ihren Anfangsmoment setzten, sich auf dem nämlichen Punkte befunden haben müßten. In der That muß die Rechnung eine Auskunft dieser Art geben, da wir dem Voreilenden eine größere Geschwindigkeit beigelegt, als dem Nachfolgenden, jenem $\frac{2}{3}$, diesem $\frac{1}{4}$ Meile in der Stunde, und es ist als ein großer Vorzug der Darstellung in Buchstaben mit Bezeichnung des Positiven und Negativen zu betrachten, daß durch sie alle möglichen Fälle, selbst die der Voraussetzung ganz entgegenlaufenden, ausgesprochen werden.

59. Gleichungen mit zwei unbekanten Größen. Ist eine Aufgabe von der Art, daß zwei unbekannte Größen darin auftreten, so muß sie auch zu zwei verschiedenen Gleichungen Veranlassung geben, da eine einzige unzählig viele Bestimmungen des Gesuchten erlauben, dasselbe also im Grunde ganz unbestimmt lassen wird. Wüßte man z. B. daß A und B zusammen ein Vermögen von 30000 Thlrn. besäßen, so könnte diese Summe auf unendlich viele Arten zwischen beide vertheilt werden; wie viel aber Jeder einzelne besitze, erfahren wir durch die hinzugefügte Bemerkung, daß A doppelt so reich, als B sey. Denn nennen wir des letzten Vermögen x, so besitzt $A = 2x$ und die Summe $3x = 30000$ giebt $x = 10000$ Thalern. Oder es lassen sich auch die gegebenen Bedingungen in diesen beiden Gleichungen darstellen:

$$1)\quad x + y = 30000.$$
$$2)\quad 2x = y.$$

deren Auflösung wie die aller einfachen Gleichungen mit zwei unbekannten Größen nach folgenden allgemeinen Regeln vorgenommen werden kann.

60. Regeln der Auflösung. Es wird, um die Werthe der beiden unbekannten Größen zu finden, die in zwei Gleichungen nach bestimmten Bedingungen mit andern gegebenen verbunden sind, zuerst die Entfernung der einen von ihnen nöthig seyn, damit man die andere bestimme, worauf man mit Benutzung des bereits gefundenen Werthes auch jene

ohne Mühe wird ausmitteln können. Dieſe Entfernung oder ſogenannte Elimination der einen unbekannten Größe, wodurch man zu einer neuen, von ihr befreieten aber immer noch die gegebenen Bedingungen enthaltenden, Gleichung gelangt, iſt auf dreifache Weiſe zu erreichen.

I. Man darf nur ihren Werth durch die bekannten Größen und die andere unbekannte ausgedrückt, aus der erſten Gleichung ziehen und in der zweiten an die Stelle ſetzen oder ſubſtituiren. Im obigen Beiſpiele:

1) $x = 30000 - y$
2) $2\,(30000 - y) = y$.

II. Man zieht aus beiden Gleichungen zwei der Form nach verſchiedene Werthe der einen unbekannten Größe und bildet durch deren Gleichſetzung eine neue dritte Gleichung:

1) $x = 30000 - y$
2) $x = \frac{1}{2}y$
3) $\frac{1}{2}y = 30000 - y$.

III. Man ſucht die Gleichungen durch Multiplication mit einem entſprechenden Factor ſo einzurichten, daß bei ihrer Addition oder Subtraction die Glieder mit einer unbekannten Größe verſchwinden, indem ſie einander aufheben.

1) $x + y = 30000$
folglich auch $2x + 2y = 60000$
2) $2x = y$
3) Diff. $2y = 60000 - y$.

61. Anwendungen. Es mögen hier ebenfalls zur deutlicheren Darſtellung dieſer Regeln einige Beiſpiele folgen, in denen beſtimmte Aufgaben in die mathematiſche Zeichenſprache übergetragen d. h. durch Gleichungen ausgedrückt und durch einfache Anwendung der Grundoperationen ſtufenweiſe aufgelöſt werden. Die Wahl der Eliminationsmethode iſt jedesmal durch I. II. und III. bemerklich gemacht.

1. Welche Zahlen ſind es, deren Summe 144 und deren Differenz 66 beträgt?

Gleichungen. 1) $x + y = 144$
2) $x - y = 66$

Auflöſung. (III) 3) $2y = 78$.

$y = 39$, und $x = 66 + y = 105$.

2. A und B geben von ihrem Vermögen, welches 19600 ℳ beträgt, jener $\frac{1}{6}$, dieser $\frac{1}{5}$ zu einem Handelsgeschäfte und behalten beide gleichviel übrig. Wie groß ist das Vermögen des Einzelnen?

Gleichungen. 1) $x + y = 19600$

2) $x - \frac{1}{6}x = y - \frac{1}{5}y$

d. i. $\frac{5}{6}x = \frac{4}{5}y$

Auflösung (I.) $x = \frac{6}{5} \cdot \frac{4}{5}y = \frac{24}{25}y$

und $x + y = \frac{24}{25}y + y = \frac{24y + 25y}{25} = \frac{49}{25}y = 19600$

$y = \frac{25}{49} \cdot 19600 = 10000$, und $x = \frac{24}{25} \cdot 10000 = 9600$.

3. Das Gewicht von zwei Körpern, x und y, soll aus folgenden Umständen berechnet werden: $\frac{2}{5}$ von x wiegen 96 Pfund weniger, als $\frac{3}{4}$ von y, und $\frac{5}{8}$ von diesem genau so viel als $\frac{4}{9}$ von jenem.

Gleichungen. 1) $\frac{2}{5}x + 96 = \frac{3}{4}y$.

2) $\frac{4}{9}x = \frac{5}{8}y$.

Auflösung (II) 1) $x = \frac{5}{2}\left(\frac{3}{4}y - 96\right)$

2) $x = \frac{9}{4} \cdot \frac{5}{8}y$.

also 3) $\frac{5}{2}\left(\frac{3}{4}y - 96\right) = \frac{9}{4} \cdot \frac{5}{8}y$

$\frac{15}{8}y - \frac{480}{2} = \frac{45}{32}y$ oder $60y = 7680 = 45y$.

$15y = 7680$

folglich $y = \frac{7680}{15} = 512$ und $x = \frac{45}{32} \cdot 512 = 720$.

62. Gleichungen mit mehreren unbekannten Größen. Sollten in einer Aufgabe noch mehr, als zwei unbekannte Größen vorkommen, so werden die in ihr gegebenen Bedingungen, in der Zeichensprache dargestellt, zu eben so viel verschiedenen Gleichungen führen müssen, wenn die Auflösung, d. h. die Angabe bestimmter Zahlenwerthe für das Gesuchte überhaupt möglich seyn soll. So ist es z. B. nicht hinreichend, wenn uns, um den Sold der verschiedenen Truppenarten auszumitteln, gesagt wird, daß in A 3000 Mann

Infanterie, 800 Mann Cavallerie und 500 Mann Artillerie, in B 2400 Inf., 200 Cav., 300 Art., in C 1500 Inf., 1200 Cav. und 600 Art. garniſoniren und deren monatliche Beſoldung in A 15000 und in B 9400 Thlr. beträgt; denn die hier gegebenen Umſtände veranlaſſen nur folgende beiden Gleichungen:

$$1)\quad 3000x + 800y + 500z = 15000,$$
$$2)\quad 2400x + 200y + 300z = 9400,$$

worin die unbekannten Größen durchaus nicht beſtimmt werden können. Wird aber außerdem angegeben, daß die monatliche Beſoldung in C 12900 Thlr. beträgt, ſo führt die hinzukommende dritte Gleichung

$$3)\quad 1500x + 1200y + 600z = 12900$$

zu einer beſtimmten Löſung der Aufgabe durch *allmählige Elimination* zwei unbekannter Größen, ſo daß nur eine derſelben in Verbindung mit den gegebenen Größen übrig bleibt. Man gebraucht zu dieſer Elimination eine oder die andere der obigen Methoden, und findet im vorliegenden Beiſpiele die Werthe von x, y, z etwa folgendergeſtalt:

Es iſt nach 1) $30x + 8y + 5z = 150.$
nach 3) $30x + 24y + 12z = 258.$

Differenz $16y + 7z = 108$ (A)

Ferner iſt aus 1) $x = \frac{150 - 8y - 5z}{30}$

aus 2) $x = \frac{94 - 2y - 3z}{24}$

Alſo $24\,(150 - 8y - 5z) = 30\,(94 - 2y - 3z)$

d. i. zuſammengezogen $132y + 30z = 780 \ldots.$ (B)

Nun iſt der aus (A) gezogene Werth von

$$y = \frac{(108 - 7z)}{16},$$ folglich wird (B):

$$132 \cdot \frac{(108 - 7z)}{16} + 30z = 780;$$

daraus ergiebt ſich $z = \frac{1776}{444} = 4,$

und wenn wir dieſen Werth in (A) und (I) einführen,

$$y = 5;\quad x = 3.$$

63. *Allgemeine Darſtellung.* Faßt man die vorangehenden einzelnen Betrachtungen zuſammen, ſo wird man einſehen, daß alle einfachen Gleichungen, in denen nur *eine*

unbekannte Größe enthalten ist, unter die allgemeine Form $Ax = M$, diejenigen, worin zwei vorkommen, unter die Form $Ax + By = M$, die mit drei unbekannten Größen unter die Form $Ax + By + Cz = M$ fallen, und daß die allgemeinste Gestalt solcher Gleichungen $Ax + By + Cz + Dv + Ew + \text{etc.} = M$ ist, sobald man die vier Grundoperationen gehörig angewendet, alle gleichartigen Glieder zusammengefaßt und Bekanntes und Unbekanntes auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens allein gestellt hat. Man wird überhaupt eben so viele Gleichungen bedürfen, als unbekannte Größen vorkommen, wenn diese bestimmbar seyn sollen, weil man bei wenigeren Gleichungen nicht im Stande ist, alle bis auf eine zu eliminiren, also zu keinem bestimmten Werthe für irgend eine der unbekannten Größen gelangen kann.

Die Regeln der Auflösung bleiben im Ganzen dieselben, wie groß auch die Menge der unbekannten Größen und der Gleichungen seyn mag. Die Resultate erscheinen regelmäßiggestaltet, wenn man die allgemeinen Gleichungen

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz \ldots &= M \\ A'x + B'y + C'z \ldots &= M' \\ A''x + B''y + C''z \ldots &= M'' \end{aligned}$$

der Auflösung unterzieht, und lassen sich dann als Formeln aussprechen, die für alle Fälle gültig sind, und in jedem einzelnen Falle die Substitution der besondern Zahlenwerthe für A, B, C u. s. weiter erfordern. Zu dieser Absicht ist es indessen zweckmäßig, spätere Betrachtungen der combinatorischen Operationen zu Hülfe zu nehmen. (S. §. 175.)

Anmerkung. Die für practische Rechnungen so vortheilhaft anzuwendende Kettenregel gründet sich auf die Verbindung mehrerer einfacher Gleichungen, indem man so lange zwei Größen des nämlichen Werthes einander gleich setzt, bis man zu derjenigen Art von Größen kommt, nach deren Einheitsmenge gefragt wird. Bezeichnet man die unbekannte Zahl mit x, die Art ihrer Einheiten durch A, Einheiten anderer Art durch B, C, D..., so sei allgemein:

$$\begin{aligned} x.\ A &= b.\ B \\ \beta.\ B &= c.\ C \\ \gamma.\ C &= d.\ D \\ \delta.\ D &= a.\ A. \end{aligned}$$

Da nun $B = \frac{c}{\beta} . C$, $C = \frac{d}{\gamma} . D$, $D = \frac{a}{\delta} . A$, so kann man eine Art von Größen auf die andere (ihrem Werthe nach) reduciren, und aus:

$$x. \quad A = b . \frac{c}{\beta} . C = \frac{bcd}{\beta\gamma} . D = \frac{abcd}{\beta\gamma\delta} A \text{ od. } x = \frac{abcd}{\alpha\beta\gamma}$$

ergiebt sich die bekannte Regel, daß man, um x zu finden, das Product der Zahlen zur Rechten durch dasjenige der Zahlen zur Linken dividiren müsse.

Sechstes Kapitel.

Die Differenz- und Verhältnißgleichungen.

64. **Verhältnisse und Proportionen.** Unter allen Gleichungen pflegen in den allgemeinen Betrachtungen der Arithmetik diejenigen besonders hervorgehoben zu werden, worin vier Größen entweder als Differenzen oder als Quotienten mit einander in Verbindung treten, also Gleichungen der Form:

$$I) \quad a - b = c - d.$$

$$II) \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ oder } a : b = c : d.$$

Es kommt nämlich bei der Vergleichung zweier Größen entweder ihr **Unterschied** oder die **Wiederholbarkeit** der einen in der andern in Betracht, oder nach dem mathematischen Sprachgebrauche: ihr **arithmetisches** oder **geometrisches** Verhältniß. Die Zusammenstellung zweier solcher gleichbedeutender Verhältnisse wird nach eben diesem Sprachgebrauche eine **arithmetische** oder **geometrische Proportion**, besser aber eine **Differenz-** oder **Verhältnißgleichung** genannt.*) Nach beiden Benennungsarten können die vier Größen oder **Glieder** der Gleichung als **äußere** (a

*) Da der Begriff des Wortes Verhältniß als des relativ Vielfachen zweier Größen nur auf Quotienten, durchaus nicht auf Differenzen paßt, und die Beinamen arithmetisch und geometrisch nichts weniger als passend und bezeichnend genannt werden können, so mögen hier jene Größenverbindungen nur unter dem bestimmtern Namen von **Differenz-** oder **Verhältnißgleichungen** auftreten.

und d) und innere (b und c), ferner als vorangehende (a und c) und nachfolgende (b und d), oder ihrer ursprünglichen Folge nach als erstes, zweites, drittes und viertes Glied in den, aus ihrer Betrachtung sich ergebenden, Lehrsätzen unterschieden werden.

65. Differenzgleichungen. Die allgemeine Form der Differenzgleichungen I) $a - b = c - d$, erlaubt einige Umgestaltungen, die als arithmetische Lehrsätze ausgesprochen werden können; nämlich

$$1)\ a + d = b + c$$

d. h. die Summe der äußern ist der Summe der innern Glieder gleich.

$$2)\ a - c = b - d.$$

d. h. die Differenz der vorangehenden ist der Differenz der nachfolgenden Glieder gleich.

In dem besondern Falle, daß in den mittlern Gliedern dieselbe Größe sich wiederholt, wird diese das arithmetische Mittel zwischen den äußern Gliedern und die Differenzgleichung eine wiederholende (stetige arithmetische Proportion) genannt. Dann werden die vorstehenden Ausdrücke, weil

$$a - b = b - d,$$

$$1)\ a + d = 2b, \text{ also } b = \frac{a+d}{2},$$

d. h. das arithmetische Mittel zwischen zwei Zahlen ist ihrer halben Summe gleich, z. B. wenn $a = 15$, $d = 27$ gegeben wäre,

$$b = \tfrac{1}{2}(15 + 27) = 21.$$

$$2)\ a - b = b - d,$$

identisch mit der gegebenen Gleichung.

66. Verbindung der Differenzgleichungen. Sind mehrere Differenzgleichungen gegeben, welche gleichzeitig Statt finden, so kann man sie zu einer neuen abgeleiteten zusammenziehen, indem man die gleichstelligen Glieder summirt.

$$\begin{aligned} a - b &= c - d \\ e - f &= g - h \\ i - k &= l - m \end{aligned}$$

$$(a+e+i) - (b+f+k) = (c+g+l) - (d+h+m)$$

wenn die Gleichungen wiederholende sind, so ist dieß auch mit dem Resultate der Fall:

$$\begin{array}{l} a - b = b - d \\ e - f = f - h \\ i - k = k - m \\ \hline (a+e+i) - (b+f+k) = (b+f+k) - (d+h+m) \end{array}$$

Kehren aber stets die nachfolgenden Glieder als vorangehende wieder, so zieht sich das Resultat mehrerer Gleichungen auf eine neue zwischen den ersten und letzten Gliedern beider Seiten zusammen.

$$\begin{array}{l} a - b = c - d \\ b - f = d - h \\ f - k = h - m \\ \hline (a+b+f) - (b+f+k) = (c+d+h) - (d+h+m) \\ \text{d. i. } a - k = c - m. \end{array}$$

67. Verhältnißgleichungen. Eine bei Weitem mannigfaltigere Umgestaltung, zumal bei Anwendung einiger arithmetischer Kunstgriffe, gestattet die allgemeine Form aller Verhältnißgleichungen

$$\text{II. } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ oder } a : b = c : d,$$

wo man bei derselben Benennung der einzelnen Glieder, wie vorhin, alle Folgerungen der Rechnung als Lehrsätze aussprechen kann. Die verschiedenen Umwandlungen der gegebenen Form sind folgende:

$$1)\ a\,d = b\,c$$

d. h. die Produkte der äußern und der innern Glieder sind einander gleich.

$$2)\ \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

d. h. die Quotienten der vorangehenden und der nachfolgenden Glieder sind einander gleich, oder das erste verhält sich zum dritten Gliede, wie das zweite zum vierten. Wiederholt sich dieselbe Größe in den mittlern Gliedern, so nennt man die Verhältnißgleichung eine stetige (eine stetige geometrische Proportion) und jene Größe die mittlere (geometrische) Proportionale. Nun folgt aber aus einer solchen:

$$3)\ \frac{a}{b} = \frac{b}{d} \text{ oder } a : b = b : d$$

$$4)\ a\,d = b\,b$$

11) $\frac{a+c+e+g}{b+d+f+h} = q = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ u. ſ. w.

folgt; d. h. in Begriffen ausgeſprochen:
Wenn man in einer Reihe gleicher Zahlenverhältniſſe oder Quotienten die Dividenden und Diviſoren abgeſondert ſummirt, ſo iſt das Verhältniß ihrer Summe jedem einzelnen gleich; z. B.

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{2+4+6+8}{3+6+9+12} = \frac{20}{30}.$$

69. Verbindung der Verhältnißgleichungen. Das, was man eine Zuſammenſetzung der Verhältniſſe zu nennen pflegt, iſt eine Verknüpfung von Verhältnißgleichungen durch Multiplication oder Diviſion, wofür die Regeln in der Bruchrechnung bereits gegeben ſind. So folgt aus den Gleichungen:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ oder } a:b = c:d$$
$$\frac{e}{f} = \frac{g}{h} \quad e:f = g:h$$
$$\frac{i}{k} = \frac{l}{m} \quad i:k = l:m$$

$$\frac{aei}{bfk} = \frac{cgl}{dhm}, \text{ oder } aei:bfk = cgl:dhm.$$

und auf die nämliche Weiſe ſetzen ſich beliebig viele Verhältniſſe oder Quotienten zu einem neuen zuſammen, indem man Producte aus den gleichſtelligen Gliedern bildet.

Sind die Verhältnißgleichungen wiederholende, ſo wird aus ihrer Vereinigung wieder eine ſolche entſpringen:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{d} \text{ oder } a:b = b:d$$
$$\frac{e}{f} = \frac{f}{k} \quad e:f = f:k$$
$$\frac{l}{m} = \frac{m}{o} \quad l:m = m:o$$

$$\frac{ael}{bfm} = \frac{bfm}{dko}, \text{ oder } ael:bfm = bfm:dko.$$

Wiederholen ſich aber die nachfolgenden Glieder als vorangehend auf den nämlichen Seiten, ſo zieht das Reſultat ſich

auf eine einfache Gleichung zwiſchen den äußerſten Gliedern zuſammen:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ oder } a : b = c : d$$

$$\frac{b}{f} = \frac{d}{h} \quad b : f = d : h$$

$$\frac{f}{k} = \frac{h}{m} \quad f : k = h : m$$

$$\frac{abf}{bfk} = \frac{cdh}{dhm} \text{ oder } abf : bfk = cdh : dhm$$

$$\text{oder } \frac{a}{k} = \frac{c}{m}.$$

70. Anwendungen. Die Differenz- und Verhältnißgleichungen finden die häufigſte Anwendung in der Beſtimmung des arithmetiſchen Mittels und denjenigen Rechnungsarten, die man mit dem Namen der Regel de Tri zu bezeichnen pflegt, weil vermöge ihrer aus drei gegebenen eine vierte Größe beſtimmt werden ſoll. Als eigentliche Verhältniſſe ſind die Quotienten immer anzuſehn, wenn zwei gleichartige Größen, z. B. zwei Linien, Flächen der Körper mit einander verglichen werden, und inſofern dieſes in der Geometrie bei ähnlichen Geſtalten ſehr häufig geſchieht, um nachzuweiſen, daß von vier Größen je zwei in dem nämlichen Verhältniſſe zu einander ſtehen, ſind die arithmetiſchen Sätze von den Verhältnißgleichungen (oder geometriſchen Proportionen) für jene räumlichen Betrachtungen von der größten Wichtigkeit. (S. das vierte Kapitel der Geometrie: von der Aehnlichkeit der Figuren.)

Zweites Buch.

Die Rangoperationen.

71. Rang der Zahlen. In den bisherigen Operationen wurden die zu verknüpfenden Zahlen als gleichartig, ohne Rücksicht auf ihren größern oder geringern Inhalt, nach gemeinsamen Regeln behandelt, und die Folge, worin wir die Verbindung von Factoren oder Theilen vornahmen, erschien durchaus gleichgültig. Die Uebersicht und Ausführung wirklicher Rechnungen erfordert aber, daß man die Zahlen in Hinsicht auf ihren Inhalt in verschiedene Classen bringe oder in ihrer ursprünglichen Reihe eine Eintheilung nach bestimmten Grundsätzen vornehme, wodurch man Einheiten von verschiedenem Range erhält, deren jede höhere mehrere niedere in sich faßt, eben so, wie bei der Eintheilung des Längenmaaßes 12 Linien einen Zoll, 12 Zoll einen Fuß, 12 Fuß eine Ruthe bilden; denn ohne eine solche stufenweise, nach denselben Grundsätzen sich immer wiederholende Zusammenfassung, und eine derselben entsprechende einfache Bezeichnungsart würde die Behandlung der Zahlen mit den größten Schwierigkeiten verbunden seyn, wovon man sich sehr leicht überzeugen kann, wenn man nur ein Rechnungsexempel mit römischen Ziffern auszusprechen versucht.

72. Potenz. Ist durch a maliges Setzen der ursprünglichen Einheit die Zahl a entstanden, so kann man aus ihr durch eben so oft wiederhohltes Setzen eine Zahl a a vom zweiten Range, durch a maliges Setzen der letztern eine vom dritten Range, a a a, und auf diesem Wege fortschreitend Zahlen von jedem höhern Range erzeugen, die nichts anders als Producte der Zahl a seyn werden. Ein solches, aus gleichen Factoren bestehendes Product wird Potenz genannt und in Zeichen am einfachsten dadurch ausgedrückt, daß man die Wiederholung des Grundfactors durch eine oben nebengesetzte Zahl bemerklich macht: $a\,a\,a\,a\,a\,a = a^6$, $b\,b\,b = b^3$, $2^5 = 32$, $8^2 = 64$.

73. Wurzel. So wie durch Zusammensetzung mehrerer gleicher Factoren oder Potenzirung die Potenz als eine höhere Rangzahl entsteht, gelangt man umgekehrt durch Zerlegung in gleiche Factoren zu einer niedrigern, die den Namen der Wurzel führt, weil man die gegebene, zu zerfällende Zahl als eine aus der Wiederholung dieser Wurzel erwachsene Potenz betrachtet. Daher die gleichbedeutenden Ausdrücke von Wurzelausziehung und Depotenzirung, angedeutet durch das Zeichen $\sqrt[n]{\ }$; d. h. nte Wurzel, z. B. $\sqrt[5]{a^5} = \sqrt[5]{aaaaa} = a$, $\sqrt[3]{b^3} = \sqrt[3]{bbb} = b$, $\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$

Die zweite Wurzel pflegt man einfach mit $\sqrt{\ }$ zu bezeichnen. —

74. Exponent. Die den Rang der verschiedenen Potenzen eines Grundfactors bezeichnende, oben neben gesetzte Zahl wird als das eigentlich bestimmende, wesentliche Merkmal der Potenz, Exponent genannt. Sie ist bei der Verbindung von gleichen Factoren zu einer höhern Potenz und bei der Zerfällung einer Zahl in solche Factoren, d. h. bei der Potenzirung und Wurzelausziehung nothwendig jedesmal gegeben, kann aber selbst gesucht werden, wenn eine Zahl als Potenz einer andern betrachtet wird, z. B. in $64 = 4^x$ oder $\sqrt[y]{64} = 2$, wo $x = 3$ und $y = 6$ ist, und heißt in diesem Falle Logarithmus der gegebenen Zahl.

75 Rangoperationen. In den Ausdrücken der Potenzirung: $a^n = P$, der Wurzelausziehung: $\sqrt[n]{P} = a$, und der Logarithmenberechnung (Exponentiirung): $a^x = P$, liegen die allgemeinen Andeutungen der drei verschiedenen Rangoperationen enthalten, die ausführlich in den nachfolgenden Capiteln betrachtet werden sollen.

Erstes Kapitel.

Die Zahlensysteme.

76. **Grundzahl.** Wenn man, von der Einheit ausgehend, bis zu einer beliebigen Zahl a fortschreitet, und dadurch, daß man mit ihr das unmittelbare Zählen und die einfache Bezeichnung durch Ziffern endigt, ihr zuerst unter den Zahlen einen Rang ertheilt, so wird dieselbe **Grundzahl** eines nach ihr zu benenenden **Zahlensystems**. Die getroffene Wahl einer gewissen Menge von Einheiten zur Bildung der Grundzahl bestimmt, jedesmal das ganze Zahlensystem, denn es liegt in dem Begriff eines solchen, daß **alle höhere Rangzahlen aus den nächstvorgehenden sich auf die nämliche Weise bilden, wie die Grundzahl aus der ursprünglichen Einheit entstand.** So erhält man als Rangzahlen nach dem Schema: $a, a^2, a^3, a^4, a^5 \ldots$ für das

dyadische System	2,	4,	8,	16,	...
triadische —	3,	9,	27,	81,	...
tetradische —	4,	16,	64,	256,	...
pentadische —	5,	25,	125,	625,	...
hexadische —	6,	36,	216,	1296,	...
heptadische —	7,	49,	343,	2401,	...
oktadische —	8,	64,	512,	4096,	...
enneadische —	9,	81,	729,	6561,	...
dekadische —	10,	100,	1000,	10000,	...

77. **Höhere Einheiten.** Die in unserm dekadischen Zahlensysteme gebräuchliche Art, die Rangzahlen mit einer, durch Nullen immer weiter vorgeschobene 1 anzudeuten, müßte auch, wenn man nach irgend einem andern dieser Systeme rechnen wollte, angewendet werden, weil man je von einer jeden Rangzahl **wie von einer neuen Einheit** weiterzählen, oder sie in Beziehung auf das Folgende nur als eine einfache Größe betrachten soll. Demnach bedeuten die Rangzahlen 10, 100, 1000, ... in den verschiedenen Zahlensystemen, jenachdem ihre Grundzahl zwei, drei u. s. w. ist, die oben dekadisch bemerkten verschiedenen Werthe, und können

ihrem Begriffe und ihrer Bezeichnung gemäß die höhern Einheiten dieser Systeme zum Unterschiede von der niedern oder ursprünglich gedachten genannt werden.

78. Einfluß der Stelle. Bei jeder höheren wird, wie bei der ursprünglichen Einheit, ein mehrmaliges Vorkommen immer durch die entsprechende Ziffer angedeutet und deren Rang durch die Menge der folgenden Stellen bestimmt. So ist

$10000 + 1000 + 100 + 10 + 1$ sechsmal genommen
$= 60000 + 6000 + 600 + 60 + 6$, und da die Nullen nur den Mangel anderer Ziffern und den Rang zu bezeichnen dienen, so kann man diese verschiedenen Glieder bequemer in ein einziges $= 66666$ zusammenziehen, wie auch umgekehrt die Zahl 66666 in jene einzelnen Glieder wieder zerlegen. Der Rang jeder einzelnen Ziffer erscheint demnach von der Stelle abhängig, welche sie unter den sämmtlichen, eine Zahl bildenden, Ziffern einnimmt. Auf diese Weise sind wir im Stande, mit einer geringen Menge derselben jede beliebige Zahl darzustellen, indem deren Werth zugleich von der Stellung und dem Inhalte ihrer Ziffern bestimmt wird.

79. Verbindung der Zahlen. Bei der Verknüpfung mehrerer, nach einem bestimmten Zahlensysteme bezeichneter Zahlen, muß die sorgfältigste Rücksicht auf den Rang der einzelnen Ziffern genommen, nur das Gleichnamige (von gleichem Range) zusammengefaßt, und dasjenige, was die Potenzen der angenommenen Grundzahl überschreitet, jedesmal auf die nächstfolgende höhere Einheit übertragen werden. Diese allgemeine, aus practischen Rechnungen hinlänglich bekannte Regel gehört, als wesentlich verbunden mit der Ziffernbezeichnung, jedem Zahlensysteme ohne Ausnahme an, und mag hier für verschiedene derselben bei einzelnen Beispielen der vier Grundoperationen in Anwendung gebracht werden.

80. Addition. Man vereinige folgende, nach dem pentadischen Systeme gebildete, Zahlen:

3412
2034
1413
Summe 12424

Um die Richtigkeit des Resultats zu prüfen, bestimme man für jede einzelne Ziffer, was sie in unserm dekadischen Zahlensysteme bedeutet, und summire dann die Werthe.

2	=	2	Dek.	4	=	4	Dek.
1.5	=	5	—	3.5	=	15	—
4.5.5	=	100	—	0.5.5	=	00	—
3.5.5.5	=	375	—	2.5.5.5	=	250	—
3412	=	482	—	2034	=	269	—

3	=	3	Dek.
2.5	=	10	—
4.5.5	=	100	—
1.5.5.5	=	125	—
3241	=	238	—

4	=	4	Dek.
2.5	=	10	—
4.5.5	=	100	—
2.5.5.5	=	250	—
1.5.5.5.5	=	625	—
Summe 12424	=	989	= (482 + 269 + 238)

81. Subtraction. Wenn bei dem Abziehen gleichnamiger Ziffern der Subtrahendus den Minuendus übersteigt, so ist man genöthigt, der nächsten Ziffer vom höhern Range eine Einheit zu entziehen, und diese in niedrigere zu zerlegen. Folgende Zahlen aus dem tetradischen Systeme mögen als Beispiel dienen.

Min.	=	301203					
Subtr.	=	232312					
Diff.	=	2231					
3	=	3	Dek.	2	=	3	Dek.
0.4	=	0	—	1.4	=	4	—
2.4.4	=	32	—	3.4.4	=	48	—
1.4.4.4	=	64	—	2.4.4.4	=	128	—
0.4.4.4.4	=	0	—	3.4.4.4.4	=	768	—
3.4.4.4.4.4	=	3072	—	2.4.4.4.4.4	=	2058	—
Min. 301203	=	3171	Dk.	Subtr. 232312	=	2998	

1	=	1	Dek.
3.4	=	12	—
2.4.4	=	32	—
2.4.4.4	=	128	—
Dff. 2231	=	173	= (3171 — 2998).

82. Multiplication. Bei der Erzeugung eines Products aus mehrziffrigen Factoren beginnt man mit den niedrigsten Stellen, jeden Ueberschuß über die Einheitsmenge der Grundzahl der nächsthöheren Stelle hinzufügend und die gleichnamigen Ziffern der Partialproducte genau unter einander stellend, um sie zum Gesammtproducte zu summiren.

Beispiel aus dem hexadischen Systeme:

Mdus 532
Mtor 243

Partialprod. 2440, 3412, 1504

Product 231400

2	=	2 Dek.	3	=	3 Dek.
3.6	=	18	4.6	=	24
5.6.6	=	180	2.6.6	=	72
Mdus 532	=	200.	Mtor 243	=	109.

0	=	0 Dek.
0.6	=	0
4.6.6	=	144
1.6.6.6	=	216
3.6.6.6.6	=	5888
2.6.6.6.6.6	=	15552
Product 231400	=	21800 = (200. 109).

83. Division. Bei der Vergleichung zweier Zahlen beginnt man mit derjenigen der höchsten Stellen, um den Quotienten allmählig von seiner höchsten bis zur niedrigsten Ziffer zu erhalten, indem zu den Resten der höheren Einheiten stets die folgenden niedrigern gezogen und die Vergleichung immer von Neuem angestellt wird, bis der Divisor nicht ein einziges Mal mehr im Dividendus enthalten ist. Hier ein Beispiel aus dem heptadischen Systeme:

354 | 3365241 | 6402
3153

2122
2112

1041
1051

0

4	=	4 Dek.		2	=	2 Dek.	
5.7	=	35		0.7	=	0	
3.7.7	=	147		4.7.7	=	196	
				6.7.7.7	=	2058	
Diviſ. 354	=	186.	Quot.	6402	=	2256.	

1	=	1 Dek.
4.7	=	28
2.7^2	=	98
5.7^3	=	1715
6.7^4	=	14406
3.7^5	=	50421
3.7^6	=	352947
Divid. 3365241	=	419616 = (186. 2256)

84. **Höhere und niedrigere Einheiten.** Das Bildungsgeſetz, nach welchem höhere Einheiten eines Zahlenſyſtems aus den vorangehenden ſich dadurch entwickeln, daß man dieſe mit der Grundzahl **multiplicirt**, erlaubt ebenfalls ein Zurückſchreiten durch Diviſion mit der Grundzahl, wodurch wir zu **niedrigeren** Einheiten, als der urſprünglich gedachten, mithin zu ächten Brüchen gelangen, deren Nenner Potenzen der Grundzahl ſind. Die allgemeine Reihe der höhern und niedern Einheiten hat alſo für alle Zahlenſyſteme die Form:

$$\ldots\ldots\ 1000,\ 100,\ 10,\ 1,\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{1000},\ \ldots\ldots$$

oder, wenn man durch **vorgeſetzte** Nullen den jedesmaligen **niedrigern** Rang der Ziffer 1 beſtimmen will:

$$\ldots\ldots\ 1000,\ 100,\ 10,\ 1,\ 01,\ 001,\ 0001\ \ldots\ldots$$

und dieſe Reihe dehnt ſich ſteigend und abnehmend in's Unendliche, d. h. bis zu jeder beliebigen höhern oder niedern Einheit aus.

85. **Decimalbrüche.** Wenn wir im dekadiſchen Zahlenſyſteme jedes Mehrfache der urſprünglichen Einheit nach der Grundzahl **Zehn** ordnen, bezeichnen und ausſprechen, ſo erſcheint es durchaus angemeſſen, auch die **Theilung** der Einheit nach dieſer Grundzahl vorzunehmen und den Werth einer Größe, die weniger als Eins beträgt, in Zehn-, Hundert-, Tauſend-Theilen u. ſ. f. oder in Decimalbrüchen anzugeben, weil die Bezeichnungsart des Syſtems, wornach die **Stelle** den **Rang** andeutet, ſolche Brüche **ohne ihre Nenner**

zu schreiben und damit eben so, wie mit ganzen Zahlen zu rechnen erlaubt.

86. Bezeichnung. Ist eine ganze Zahl mit einem Decimalbruch verbunden, so wird man ihre Gränze durch ein Comma oder einen Punct zwischen den Einheiten und Zehntheilen angeben müssen, wie in $24,326 = 24 + \frac{3}{10} + \frac{2}{100} + \frac{6}{1000}$; steht der Bruch allein, so muß der Mangel jeder ganzen Einheit durch eine, dem Trennungszeichen vorgesetzte Null, wie in $0,628 = \frac{6}{10} + \frac{2}{100} + \frac{8}{1000}$ bezeichnet werden. — Hieraus folgt, daß alles von der Stelle des Commas und seiner Versetzung, aber nichts von einer Hinzufügung von Nullen für den Werth des Decimalbruchs abhängt, und daß jene allein hinreicht, ihn durch höhere Einheiten zu multiplicíren oder zu dividiren. Denn es ist $0,52 = 0,520 = 0,5200$ u. s. w., da die Nenner hier gleichmäßig mit dem Zähler wachsen; aber $0\,5,2$ und $0,052$, durch die Stellung des Commas verschieden von $0,52$, bedeutet das Zehnfache und den zehnten Theil dieses Decimalbruches. Die hinter dem Comma folgenden Ziffern begreift man unter dem Namen Decimalstellen. Ihre Anzahl bestimmt jedesmal den zugehörigen Nenner des Decimalbruchs, weil derselbe eben so viele der 1 angehängte Nullen enthalten muß.

87. Verbindung der Decimalbrüche. Die Rechnung mit Decimalbrüchen beruht nach allem Vorhergehenden auf denselben Gründen, wie diejenige mit ganzen Zahlen, und fordert daher nur dieselbe Rücksicht auf den Rang der einzelnen Ziffern, der durch ihre Stellen gegeben ist. Zusammenziehung des Gleichnamigen und Uebertragung dessen, was das zehnfache jeder Einheit erreicht, auf die nächst höhere Stelle, sind wiederum die allgemeinen Vorschriften, nach denen hier die Grundoperationen ausgeführt werden müssen.

88. Addition. Befinden sich unter den zu addirenden Decimalbrüchen mehrziffrige, so ist zu bemerken, daß solche in eine Summe einfacher zerlegt werden können, (weshalb man sie auch zusammengesetzte nennt.)

0,3	=	0,3
0,47	=	0,4 + 0,07
0,05	=	0,0 + 0,05
0,3624	=	0,3 + 0,06 + 0,002 + 0,004
0,908	=	0,9 + 0,00 + 0,008
2,0904	=	1,9 + 0,18 + 0,010 + 0,0004.

89. Subtraction. Beim Abziehen kann man sich derselben Zerlegung zur Erklärung bedienen.

6,0374	=	6 + 0,0 + 0,03 + 0,007 + 0,0004
3,04693	=	3 + 0,0 + 0,04 + 0,006 + 0,0009 + 0,00003
2,99047	=	3 + 0,0 − 0,01 + 0,001 − 0,0005 − 0,00003

Die fehlenden Hundert-, Zehntausend- und Hunderttausend-Theile müssen hier von den nächst höheren entlehnt werden, wodurch sich 0,03 in 1,03; 0,0004 in 0,0014 und 0,00000 in 0,00010 verwandelt.

90. Multiplication. Da bei der Multiplication von Brüchen das Product der Zähler den Zähler, das der Nenner den Nenner des ebenfalls gebrochenen Products giebt, so multiplicirt man Decimalbrüche ohne Rücksicht auf den Ort des Commas, schneidet aber im Producte so viele Decimalstellen von der Rechten zur Linken ab, als die Summe der in den Factoren enthaltenen beträgt, und ergänzt etwa mangelnde Stellen durch Nullen:

$$0,12.0,6.2,814.0,0002 = \frac{12}{100} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{2814}{1000} \cdot \frac{2}{10000}$$

$$\text{oder } 0,0000405216 = \frac{405216}{10000000000}$$

91. Division. Da die Summe der Decimalstellen in den Factoren die Anzahl im Product bestimmt, so folgt umgekehrt für die Division der Decimalbrüche, daß man hier die Anzahl der Decimalstellen im Divisor (dem einen Factor) von derjenigen im Dividendus (dem Producte) abziehen müsse, um die Menge der im Quotienten (dem andern Factor) enthaltenen zu gewinnen. Am deutlichsten erscheint aber die Division der Decimalbrüche, wenn man Divisor und Dividendus durch Anhängung von Nullen zuvor gleichnamig macht.

$$\frac{0,1722}{0,014} = \frac{1722}{14} = 12,\ 3.$$

$$\text{oder } \frac{0,1722}{0,0140} = \frac{\left(\frac{1722}{10000}\right)}{\left(\frac{140}{10000}\right)} = \frac{1722}{140} = 12 + \frac{3}{10}$$

$$\frac{0,144}{0,00024} = \frac{0,14400}{0,00024} = 600.$$

92. Periode eines Decimalbruchs. Wenn bei der Division zweier Zahlen ein Rest bleibt, so kann man sie noch weiter treiben, indem man fortgesetzt Nullen anhängt, um neue Decimalstellen zu erhalten, die den Quotienten immer genauer angeben. Ist der Dividendus nun wirklich ein vollkommenes Aliquotes des Divisors, so wird sich dieses durch Erschöpfung des letztern ausweisen; im entgegengesetzten Falle kann aber die Division nie ein Ende erreichen, sondern muß willkührlich abgebrochen werden, wenn man den Quotienten hinlänglich genau bestimmt zu haben glaubt. Dabei ist zu bemerken, daß wenn eine Ziffer als Rest bleibt, die bereits als solcher vorgekommen, dieselben Decimalstellen wiederkehren müssen, deren Inbegriff man die Periode eines solchen unvollständigen Decimalbruchs nennt. Beispiele 731 : 8 und 354 : 7.

8	731	91,375	7	354	50,571428....
	72			35	
	11			40	
	8			35	
	30			50	
	24			49	
	60			10	
	56			7	
	40			30	
	40			28	
	0.			20	
				14	
				60	
				56	
				4.	

93. Verwandlung in Decimalbrüche. Jede gebrochene Zahl läßt sich in der Gestalt eines Decimalbruchs dar-

ſtellen, wenn man ſie nur durch dieſelbe höhere Einheit zugleich im Zähler und Nenner multiplicirt. Denn alsdann kann die Diviſion des Zählers durch den einen Factor des Nenners zuerſt vollzogen und der andere Factor des Quotienten als Nenner untergeſetzt werden. So iſt:

$$\frac{3}{4} = \frac{3.100}{4.100} = \frac{\left(\frac{300}{4}\right)}{100} = \frac{75}{100} = 0,75.$$

$$\frac{7}{800} = \frac{7.100000}{800.100000} = \frac{\left(\frac{700000}{8}\right)}{100000} = \frac{875}{100000} = 0,00875.$$

Aber nicht immer wird ein gegebener Bruch mit einer Potenz von 10 als Nenner oder in Form eines Decimalbruchs ſich vollſtändig darſtellen laſſen, und es bleibt in ſolchem Falle nichts übrig, als ſich mit einem Näherungswerthe zu begnügen, der jedoch bis zu jedem beliebigen Grade der Genauigkeit getrieben werden kann, indem man mit hinreichend hohen Potenzen von 10 im Zähler und Nenner multiplicirt. z. B.

$$\frac{2}{3} = \frac{2.10000}{3.10000} = \frac{\left(\frac{20000}{3}\right)}{10000} = \frac{6666}{10000} = 0,6666\ldots$$

$$\frac{3}{7} = \frac{3.1000000}{7.1000000} = \frac{\left(\frac{3000000}{7}\right)}{1000000} = \frac{428571}{1000000} = 0,428571$$

Da dieſe ſechs Decimalziffern die Perriode des Bruches $\frac{3}{7}$ bilden, ſo kann man denſelben als Decimalbruch bis auf beliebige Theile der Einheit genau, wenn auch nie erſchöpfend, darſtellen. In Tauſendbilliontheilen angegeben iſt er z. B.

$$\frac{3}{7} = 0,428571428571428.$$

Wegen dieſer Unvollſtändigkeit in der Darſtellung der meiſten gewöhnlichen Brüche durch Decimalen iſt eine ſolche Verwandlung nicht immer, und im Allgemeinen mehr bei vorgeſchriebener Addition und Subtraction, als bei Multiplication und Diviſion anzurathen, da ohnehin jene beiden Operationen bei gewöhnlichen Brüchen in der Regel viel mühſamer, als die beiden letzten zu vollziehen ſind. Um ſich an einem Beiſpiele zu überzeugen, wie ſehr die Rechnung an Leichtigkeit und

Genauigkeit bei der vorläufigen Umsetzung in Decimalbrüche verlieren kann, bilde man die Producte der gleichbedeutenden Brüche:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{35} = (0{,}3333\ldots)\ (0{,}714285..)\ (0{,}0857142..)$$

Zweites Kapitel.

Bildung und Auflösung der zweiten Potenz.

94. Quadrat. Der Umstand, daß man den Flächeninhalt eines Quadrats berechnet, indem man die Zahl für das Längenmaaß seiner Seite mit sich selbst multiplicirt, hat jedem aus zwei gleichen Factoren bestehenden Producte den Namen eines Quadrats gegeben, so daß dieses Wort eine doppelte, geometrische und arithmetische, Bedeutung erhalten hat und in der letzten mit dem Ausdruck zweite Potenz einerlei ist. Dieses arithmetische Quadrat ist stets eine unbenannte Zahl, welche aus ganzen und gebrochenen, positiven und negativen Zahlen entstanden seyn kann, und hat in Beziehung auf diese folgende Eigenschaften:

1) Das Quadrat jeder ganzen Zahl giebt wieder eine solche und zwar größere. Ist $a > 1$ so ist $a^2 > a$, z. B. $5 > 1$, und $5.5. > 5$.

2) Das Quadrat eines Bruches kann nur wiederum ein Bruch seyn. Ist $\frac{a}{b}$ ein Bruch in seiner einfachsten Gestalt, so ist $\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}$ ebenfalls nicht weiter zu vereinfachen, z. B. $\frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{25}$.

3) Das Quadrat jeder ganzen Zahl ist positiv., sie selbst sey positiv oder negativ. Denn

1) $(+a)(+a) = +a^2$; z. B. $(+4).(+4) = +16$

2) $(-a)(-a) = +a^2$; z. B. $(-4)(-4) = +16$.

4) Das Quadrat eines Products ist Product aus den Quadraten seiner Factoren; $(ab)^2 = a^2 b^2$, z. B. $(5.6.)^2 = 5.^2 6^2 = 900$.

Ist ferner eine gegebene Zahl (a+b+c+d+ etc.), folglich auch ihre erste Ziffer a vom Range n, so ist der Rang von b = n − 1, von c = n − 2 u. s. w., folglich derjenige von a b um 1 niedriger, als von a^2, von b^2 wieder um 1 niedriger als von a b u. s. f., so daß man die Zahlenwerthe dieser Producte, ihrer Rangverschiedenheit wegen, allmählig immer um eine Stelle weiter hinausrücken muß, wenn die gleichnamigen Ziffern unter einander zu stehen kommen sollen. Nach dieser Bemerkung konnte die Entwickelung der zweiten Potenz ohne Hinzufügung von Nullen einfacher auf diese Art vorgenommen werden.

$(3\ 7\ 6\ 9\ 5)^2$	$3^2 =$	9
a+b+c+d+e	2.3.7 =	42
	$7^2 =$	49
37+6	2.37. 6 =	444
B+c	$6^2 =$	36
376+9	2.376. 9 =	6768
C+d	$9^2 =$	81
3769+5	2.3769. 5 =	37690
D+e	$5^2 =$	25
37695		1420913025

99. Quadratwurzel. Ist umgekehrt eine Zahl gegeben, die man als Quadrat einer andern unbekannten betrachten soll, so kann man vermittelst derselben Formel des Binomiums, deren man sich bei der Zusammensetzung bediente, auch die Auflösung oder Wurzelausziehung vornehmen. Ist nun die Zahl vom Range 2n oder 2n + 1, so kann die Wurzel nur vom Range n seyn, oder sie enthält ein mehr, als die Hälfte der Ziffern, und weil bei der Bildung der zweiten Potenz die Quadrate der Einer stets weniger als 100, die der Zehner stets weniger als 10000, die der Hunderter weniger als 1000000 u. s. w. betragen, so darf man die Ziffern der gegebenen Quadratzahl nur von zweien zu zweien d. i. nach den Potenzen 10^2, 10^4, 10^6, u. s. w. abtheilen, um im Voraus die Stellen für a^2, b^2, c^2 u. s. w. zu bezeichnen. Ist die erste Wurzelziffer a versuchsweise bestimmt worden, indem man für die erste Abtheilung der Quadratzahl das unmittelbar kleinere a^2 aus der Reihe 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 sucht, so wird die Vergleichung von 2a mit dem Rest und der zweiten

Abtheilung zur Entdeckung von b, und nachdem man $2ab+b^2$ davon abgezogen hat, die Wiederholung des nämlichen Verfahrens mit 2 B, 2 C u. s. w. allmählig zur Bestimmung der Ziffern c, d u. s. w. führen. Als Beispiel diene die Ausziehung der Wurzel aus der oben berechneten Quadratzahl.

$\sqrt{14,\ 20,\ 91,\ 30,\ 25}$ | 3 7 6 9 5

$a^2 = 9$ | a b c d e

$2a=6)\ 520$ | B

$2ab = 42$ | C

$b^2 = 49$ | D

469 | E

$2B=74)\ 5191$

$2Bc = 444$

$c^2 = 36$

4476

$2C=752)\ 71530$

$2Cd = 6768$

$d^2 = 81$

67761

$2D=7538)\ 376925$

$2De = 37690$

$e^2 = 25$

376925

0

Anmerkung. Etwas abgekürzt wird die Rechnung, wenn man die Werthe der Ziffern b, c, d... sogleich hinter diejenigen von 2a, 2B, 2C... schreibt, weil dann die Multiplication 2 (a+b) b eine einfache, und das Addiren von $2a+b^2$ unnöthig ist.

100. Irrationalzahlen. Daß aus der Möglichkeit einer vollkommenen Zusammensetzung nicht immer die einer gleichen Auflösung folge, wovon uns bereits Multiplication und Division ein Beispiel gegeben haben, erkennt man wiederum bei der Bildung und Auflösung der zweiten Potenz. Jene ist nach einer der oben vorgeschriebenen allmähligen Erzeugungsarten oder auch durch unmittelbares Multipliciren der gegebenen Wurzelzahl mit sich selbst immer auszuführen: die Zerlegung einer ganzen Zahl hingegen in zwei gleiche Factoren oder die Ausziehung der Quadratwurzel wird sich nur dann vollständig leisten lassen, wenn diese eine

wirkliche Quadratzahl aus der Reihe 1, 4, 9, 16, 25.. u. s. w. ist, weil sonst ihre Wurzel nicht in der natürlichen Reihe der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 u. s. w. vorkommt. Daß aber eine ganze Zahl mit angehängtem ächten Bruche $\left(a+\frac{n}{m}\right)$ nie eine vollständige Quadratwurzel seyn kann, lehrt uns der allgemeine Ausdruck des aus einem solchen Binomium gebildeten Quadrats, $a^2+\frac{2an}{m}+\frac{n^2}{m^2}$, wovon der letzte Theil nothwendig wieder ein ächter Bruch seyn wird, während der Voraussetzung gemäß die gegebene Quadratzahl eine ganze war. Nichts desto weniger wird man durch Fortsetzung des oben angewendeten Verfahrens im Stande seyn, die Wurzel näherungsweise aus jeder Zahl zu ziehen, auch wenn diese keine reine Quadratzahl ist, indem man nur fortlaufend zwei Nullen an die sich ergebenden Reste hängt, nur nach den Einern der Wurzel auch Zehn-, Hundert-, Tausend-Theile u. s. w. zu bestimmen, wie in folgendem Beispiele:

		$\sqrt{}$ 1, 5 3	12, 3 6 9 3	
	$a^2=$	1	a b c d e f	
$2a=$ 2)	2	53	B	
$(2a+b)$	b $=$	44	C	
$2B=$ 24)	3	900	D	
$(2B+c)$	c $=$	729	E	
$2C=$ 246)	6	17100	F	
$(2C+d)$	d $=$	14796		
$2D=$ 2472)	9	230400		
$(2D+e)$	e $=$	222561		
$2E=$ 24738)	3	793900		
$(2E+f)$	f $=$	742149		
		51751		

Der Umstand, daß die Rechnung in solchen Fällen nie zu geschlossenen Werthen für die Wurzel führen kann, hat zu der Benennung Irrationalzahlen für dieselben Anlaß gegeben. Diese können ihrer Natur nach, wie man sieht, nie vollständig, aber doch bis zu jeder gegebenen Gränze der Einheitstheilung genau dargestellt werden, sofern man nur die Operation der Wurzelausziehung hinlänglich weit fortsetzt.

101. Quadratwurzel aus Brüchen. Da die zweite Potenz eines Bruches aus dem Quadrat des Zählers, dividirt durch das Quadrat des Nenners besteht, so erhält man die Wurzel eines, als Quadratzahl betrachteten, Bruches, indem aus seinem Zähler und Nenner abgesondert die Quadratwurzeln gezogen werden. Jedoch erscheint dieses Verfahren nur dann zweckmäßig, wenn man mit reinen Quadratzahlen zu thun hat, da sonst Zähler und Nenner der Wurzel Irrationalzahlen seyn würden. Im letzten Falle ist es vortheilhaft, den Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln, um dann auf die obige Weise die Operation vorzunehmen, wobei man auf die etwanige Verbindung des Bruches mit einer ganzen Zahl gehörige Rücksicht nehmen, und die vorläufige Eintheilung in Zifferpaare stets bei den Einern anfangen muß.

$$\sqrt{\frac{49}{81}} = \frac{7}{9}; \quad \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{2{,}6457}{2} = 1{,}3228\ldots\ldots;$$

$$\sqrt{8\frac{15}{49}} = \frac{\sqrt{407}}{7} = 2{,}88203\ldots \quad \sqrt{\frac{7}{8}} = \sqrt{0{,}875} =$$

$$\sqrt{0;\ 87{,}50} = 0{,}9354\ldots; \quad \sqrt{9\frac{2}{3}} = \sqrt{9,\ 6..} = 3{,}0983.$$

102. Imaginäre Größen. Weil das Quadrat einer negativen sowohl, als einer positiven Zahl jederzeit positiv ist, so wird man, wenn nicht anderweitige Umstände uns davon belehren, über das Zeichen der Wurzel im Allgemeinen ungewiß bleiben und deshalb z. B. $\sqrt{16} = +4$ d. h. $+4$ oder -4 setzen müssen, aus negativen Zahlen aber gar nicht im Stande seyn, die Quadratwurzel zu ziehen, weil sich in der That keine wirkliche Zahl, positiv oder negativ, denken läßt, woraus z. B: -16 durch Erhebung der zweiten Potenz entstanden seyn könnte. Da aber die Rechnung zu solchen, wenn gleich nicht auszuführenden, Andeutungen einer Wurzelausziehung gar wohl führen kann und ihre allgemeinen, auf Größen aller Art anwendbaren, Operationen auch diese Zahlensymbole nicht ausschließen dürfen, so werden dieselbe keineswegs von den Betrachtungen der Arithmetik verworfen, sondern durch Trennung in einen reellen und unmöglichen Factor, z. B. der Zahlenandeutung $\sqrt{-16}$ in

5) Die Summe der Quadrate zweier Zahlen ist 544, ihre Differenz 8. Sie selbst zu finden, muß man eine der Eliminationsmethoden anwenden bei den Gleichungen:

$$1)\ x^2 + y^2 = 544.$$
$$2)\ x - y = 8.$$

Aus 2) folgt $x^2 - 2xy + y^2 = 64$, welches subtrahirt von 1. als Rest giebt:

$$3)\ 2xy = 480$$

Den Werth von $x = \frac{480}{2y}$, in 2) substituirend, erhält man

$$4)\ \frac{240}{y} - y = 8 \text{ oder } y^2 - 8y = 240.$$

Also $y = -4 \pm \sqrt{256}$ d. i. $= -4 + 16$ und $-4 - 16$ oder 12 und -20. Im ersten Falle ist $x = 8 + y = 20$ und im zweiten $= -12$:

6) Die Summe zweier Zahlen sei allgemein $= S$, ihr Product $= P$, also $S = x + y$ und $P = x \cdot y$, so findet man die einzelnen Zahlen folgendergestalt. Es ist

$$\begin{aligned} (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 &= S^2 \\ -4xy &= -4P \\ \hline x^2 - 2xy + y^2 &= S^2 - 4P \end{aligned}$$

und wenn auf beiden Seiten dieser Gleichung die Quadratwurzel ausgezogen wird:

$$\begin{aligned} x - y &= \sqrt{S^2 - 4P}. \quad \text{Nun war aber:} \\ x + y &= S \\ \hline \text{Also } 2x &= S + \sqrt{S^2 - 4P} \\ \text{und } 2y &= S - \sqrt{S^2 - 4P}. \end{aligned}$$

Beide unbekannte Größen sind also enthalten in dem Ausdrucke $\frac{1}{2}(S \pm \sqrt{S^2 - 4P})$.

Drittes Kapitel.

Bildung und Auflösung der dritten Potenz.

105. Cubus. Da man die dritte Potenz einer Zahl dann erhält, wenn man aus einer gemessenen Seite den körperlichen Inhalt eines Würfels (Cubus) bestimmen will, insofern man nur Höhe mit Länge und Breite zu multipliciren braucht, so hat man überhaupt jedem, aus drei gleichen Factoren bestehenden, Zahlenproducte (a. a. a = a^3) den Namen Cubus beigelegt. Es gelten von denselben folgende allgemeine Sätze:

1) Der Cubus einer ganzen Zahl ist wieder eine solche, und zwar größere. Ist a > 1, so ist a^3 > a, z. B. 6 > 1 und 6. 6. 6. > 6.

2) Als Cubus eines Bruchs erhält man durch Cubiren des Zählers und des Nenners wiederum einen Bruch:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3}, \text{ z. B. } \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3^3}{4^3} = \frac{27}{64}.$$

3) Der Cubus einer positiven Zahl ist positiv, der einer negativen ebenfalls negativ: a. a. a = + a^3 und (— a) (— a) (— a) = — a^3; z. B. $(+4)^3$ = + 64 und $(-4)^3$ = — 64.

4) Der Cubus eines Products ist Product aus den Cubis seiner Factoren (a. b)^3 = $a.^3$ $b,^3$ z. B. $(3. 4)^3$ = $3.^3$ 4^3 = 1728.

106. Cubus eines Binomiums. Die dritte Potenz von (a + b), welche durch zweimalige Multiplication gefunden wird, ist $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, besteht also aus dem Cubus jedes Theils und dem dreifachen Producte seines Quadrats in die erste Potenz des andern. (Zur geometrischen Versinnlichung dient die Construction eines Würfels, dessen Seite a um die Linie b verlängnrt wird, wodurch 3 Parallelepipeda des Inhalts $a.^2$ b, drei andere des Inhalts a. b^2 und ein Cubus, dessen Seite b ist, zu dem gegebenen Cubus a^3 hinzukommen.)

107. Cubus eines Polynomiums. Jede vieltheilige Größe von der Gestalt (a + b + c + d + e +) etc. kann

durch wiederholte Anwendung dieſer Binomialformel auf zweierlei Art zur dritten Potenz erhoben werden.

I. Man bezeichne alle nachfolgenden Glieder mit einfachen Zeichen, ſetze alſo $b+c+d+e=B$, $c+d+e=C$ u. ſ. w., ſo iſt

$$(a+b+c+d+e)^3 = (a+B)^3 = a^3+3a^2B+3aB^2+$$
$$B^3=(b+c+d+e)^3 = (b+C)^3 = b^3+3b^2C+3bC^2+$$
$$C^3= (c+d+e)^3= (c+D)^3 = c^3+3c^2D+3cD^2+$$
$$D^3= (d+e)^3= (d+e)^3 = d^3+3d^2e+3de^2+e^3$$

$$(a+b+c+d+e)^3 = a^3+b^3+c^3+d^3+e^3+3(a^2B+b^2C+c^2D+d^2e)+3(aB^2+bC^2+cD^2+de^2)$$

Alſo beſteht der Cubus eines Polynomiums aus den Cubis der einzelnen Theile, den dreifachen Producten ihrer Quadrate in die Summe der nachfolgenden Theile und endlich dem dreifachen Producte aller einzelnen Theile und deren Quadrate.

II. Auch kann man anfänglich nur auf die erſten beiden Theile die Formel anwenden, dann dieſe in eine einfache Größe zuſammenziehen, und ſo fortfahren, indem man ſtets die Summe aller vorangehenden Glieder als einzelne Größe darſtellt.

$$(a+b+c+d+e)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$B+c \qquad\qquad B^3+3B^2c+\text{etc.}$$
$$C+d \qquad\qquad C^3+\text{etc.}$$
$$D+e \qquad\qquad D^3+\text{etc.}$$

108. Cubus dekadiſcher Zahlen. Soll eine Zahl des dekadiſchen Syſtems zur dritten Potenz erhoben werden, ſo kann man dieſe Operation nach der zweiten Methode eben ſo vornehmen, wie bei der Erhebung zur zweiten Potenz die Quadratformel fortgeſetzt angewendet wurde, indem man ſtets auf den Rang der einzelnen Ziffern die gehörige Rückſicht nimmt. Sey 135 die gegebene Zahl, ſo iſt

$(100+30+5)^3$	$=100^3$	$=$	1000000
$a+b+c$	$3.100^2.30$	$=$	900000
	$3.100.30^2$	$=$	270000
	30^3	$=$	27000
$130+5$	$3.130.^2 5$	$=$	253500
$B+$	$3.130.5^2$	$=$	19750
	5^3	$=$	125
			2460375

109. Rang der Cubikzahlen. Da jede Zahl zwischen zwei benachbarten Potenzen von 10 allgemein zwischen 10^n und 10^{n+1} liegt, so ist ihr Cubus zwischen den dritten Potenzen von 10^n und 10^{n+1}, d. h. zwischen 10^{3n} und 10^{3n}. 10^3 oder 10^{3n+3} enthalten, muß also wenigstens vom Range $3n$ seyn und kann nie den Rang $3n+3$ sondern höchstens $3n+2$ erreichen. Da ferner die Ziffern a, b, c u. s. w. in ihrem Range stets um 1 verschieden sind, so werden bei der Cubirug der Reihe $(a+b+c+d+\text{etc.})^3$ die Partialproducte a^3, a^2b, ab^2 u. s. f. ebenfalls um 1 im Range abnehmen, und das vorstehende Zahlenbeispiel ist einfacher ausgeführt:

$(1\ 3\ 5)^3$	1^3	$= 1$
a b c	$3.\ 1.^2 3$	$= 9$
$1+3$	$3.\ 1.\ 3^2$	$= 27$
	3^3	$= 27$
$13+5$	$3.\ 13^2\ 5$	$= 2535$
B c	$3.\ 13.\ 5^2$	$= 975$
	5^3	$= 125$
135		2460375.

110. Cubikwurzel. Diesen Weg der Bildung verfolgen wir rückwärts, um zur Auflösung der dritten Potenz, d. h. zur Zerlegung einer Zahl in drei gleiche Factoren, oder zur Ausziehung der Cubikwurzel zu gelangen. Ist die Zahl vom Range $3n$, $3n+1$, oder $3n+2$, so muß die Cubikwurzel vom Range n seyn, oder sie enthält nie mehr, als den dritten Theil ihrer Ziffern, und weil der Werth von a^3, b^3, c^3 u. s. w. stets um 3 im Range verschieden sind oder um drei Stellen auf einander folgen, so theilt man die gegebene Cubikzahl in Classen von 3 zu 3 Ziffern, bei den Einern anfangend. Die erste Wurzelziffer kann nur dadurch gefunden werden, daß man aus der Reihe der Cubi der natürlichen Zahlen:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000

denjenigen Cubus nimmt, der der ersten Ziffernabtheilung am nächsten kommt, während b durch Vergleichung des Products $3a^2b$ mit dem Anfange des Restes gewonnen wird. Die Ziffern a und b, als eintheilige Größe $= B$ setzend, dessen Cubus bereits nach und nach berechnet worden ist, findet

man auf dem nämlichen Wege c, eben so d, e u. s. w. Als Beispiel der Wurzelausziehung wählen wir die oben berechnete Cubikzahl:

$$\sqrt[3]{2,460,375} = 135$$

$a^3 =$	1		abc
	1460		B
$3a^2b =$	9		C
$3ab^2 =$	27		
$b^3 =$	27		
	1197		
$3B^2 = 507)$	263375		
$3B^2c =$	2535		
$3Bc^2 =$	975		
$c^3 =$	125		
	263375		
	0		

111. Irrationale Cubikwurzel. Da man in der Regel nur bei absichtlicher Wahl berechneter Zahlen, wie im vorstehenden Beispiele, eine reine Cubikzahl erhalten wird, allgemein hingegen solche Zahlen vorkommen, die nicht durch Multiplication drei gleicher Factoren gebildet worden, so darf man nur in seltenen Fällen eine geschlossene Cubikwurzel erwarten. Fällt die Zahl zwischen die benachbarten ganzen Zahlen a und $a+1$, so ist sie von der Form $a+\frac{n}{m}$, und ihr Cubus, $= a^3 + 3a^2\frac{n}{m} + 3a\frac{n^2}{m^2} + \frac{n^3}{m^3}$, enthält in seinem letzten Theile nothwendig wieder einen ächten Bruch. Es kann also eine ganze Zahl mit angehängtem Bruche $a+\frac{n}{m}$, nie die geschlossene Wurzel einer ganzen Zahl, sondern nur deren Näherungswerth seyn. Einen solchen, bis zu jeder beliebigen Decimalstelle der Einheit berechneten Näherungswerth oder eine irrationale Cubikwurzel erhält man durch beliebig weit fortgesetzte Wurzelausziehung nach der Formel $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, indem man nur an die Reste drei Nullen hängt, nach und nach die Zehn-, Hundert-, Tausend-Theile u. s. w. bestimmen.

$$
\begin{array}{rrl|l}
 & \sqrt[3]{12} & & 2,289 \\
 & a^3 = 8 & & a,bcd \\
\hline
3a^2 = 12) & 4000 & & B \\
 & 3a^2b = 24 & & C \\
 & 3ab^2 = 24 & & D \\
 & b^3 = 8 & & \\
\hline
 & 2648 & & \\
\hline
3B^2 = 1452) & 1352000 & & \\
 & 3B^2c = 11616 & & \\
 & 3Bc^2 = 4224 & & \\
 & c^3 = 512 & & \\
\hline
 & 1204352 & & \\
\hline
3C^2 = 2155872) & 147648000 & & \\
 & 3C^2d = 1402768 & & \\
 & 3Cd^2 = 55404 & & \\
 & d^3 = 729 & & \\
\hline
 & 140831569 & &
\end{array}
$$

112. **Cubikwurzel aus Brüchen.** So wie man, um die dritte Potenz eines Bruchs zu bilden, Zähler und Nenner zum Cubus erhebt, muß umgekehrt aus jedem besonders die Wurzel gezogen werden, wenn die Cubikwurzel des Bruches gefordert wird. Da aber in der Regel weder Zähler noch Nenner reine Cubikzahlen seyn werden und man also einen aus Irrationalzahlen bestehenden Bruch als Wurzel erhalten würde, so erscheint es zweckmäßiger, die gegebene Zahl in der Gestalt eines Decimalbruches zu schreiben, und dann nach Anleitung des Vorhergehenden die Cubikwurzel bis zu einer beliebigen Decimalstelle zu berechnen. Ist der Bruch ein unächter, so muß die Eintheilung zu drei und drei Ziffern von dem Comma ausgehen, welches Ganze und Decimaltheile trennt.

$$\sqrt[3]{\frac{12167}{884736}} = \frac{23}{96};\ \sqrt[3]{\frac{687}{8000000}} = \frac{\sqrt[3]{687}}{200} = \frac{8,82373}{200}$$

$$= 0,0441186\ldots;\ \sqrt[3]{465\frac{31}{64}} = \frac{\sqrt[3]{29791}}{4} = \frac{31}{4};$$

$$\sqrt[3]{\frac{5}{6}} = \sqrt[3]{0,833..} = 0,94103\ldots.;\ \sqrt[3]{15\frac{2}{3}} =$$

$$\sqrt[3]{15,6666..} = 2,50222\ldots.$$

113. Zeichen der Cubikwurzel. Da jede poſitive Zahl eine poſitive, jede negative eine negative Cubikzahl giebt, ſo iſt die Cubikwurzel ſtets einſtimmig mit der gegebenen Zahl, z. B. $\sqrt[3]{729} = +9$ und $\sqrt[3]{-512} = -8$.

114. Cubiſche Gleichungen. Erſcheint in einer Gleichung die unbekannte Größe in der dritten Potenz, ſo heißt ſie eine cubiſche und erfordert zu ihrer Berechnung die Ausziehung der Cubikwurzel. Sind außer x^3 auch x^2 und x in dem Gliede in der Gleichung enthalten, ſo iſt ſie nur durch analytiſche Betrachtungen und Kunſtgriffe aufzulöſen, von denen ſpäter die Rede ſeyn wird. (S. §. 206 und Anhang über die Cardaniſche Regel, nach §. 209.) Sogenannte reine cubiſche Gleichungen, von der Form $x^3 = a$ bedürfen aber nur der Wurzelausziehung, wie in nachſtehenden Aufgaben.

1) Wie groß iſt die Seite eines Würfels von 2 Cubikfuß?

$$x^3 = 2, \text{ alſo } x = \sqrt[3]{2} = 1,25992..$$

2) Von welcher Zahl giebt das Product aus der Hälfte, dem Drittel und Viertel, verbunden mit 32, die Zahl 4640?

$$\frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{3}x \cdot \frac{1}{4}x + 32 = 4640 \text{ oder } \frac{x^3}{24} + 32 = 4640$$

$$x^3 + 768 = 111360, \text{ alſo } x^3 = 110592.$$

$$x = \sqrt[3]{110592} = 48.$$

3) Von mehreren Perſonen giebt Jede tauſendmal ſo viel Thaler, als ihrer ſind, zu einem Handelsgeſchäfte, an welchem 2560 Thlr. gewonnen werden und halb ſo viel Procente, als ihrer ſind.

$$1000x.x + 2560 = 1000x.x\left(1 + \frac{1}{2}\frac{x}{100}\right)$$

d. i. $1000x^2 + 2560 = 1000x^2 + 5x^3$ oder $x^3 = 512$

$$x = \sqrt[3]{512} = 8.$$

4) Drei Zahlen ſind um 8 von einander verſchieden und geben, wenn man das Product aus der mittlern in die erſte mit der letztern multiplicirt 1000 weniger dem 64fachen der mittlern Zahl.

$$(x-8)\,x.(x+8) = 1000 - 64x$$

d. i. $x^3 - 64x = 1000 - 64x$ oder $x^3 = 1000$.

5) Von einem Buche sind 200 Exemplare mehr vorräthig, als von einem andern. Beide haben soviel Seiten und auf jeder Seite so viel Buchstaben, als von ihnen Exemplare vorhanden sind, und der Vorrath des einen enthält im Ganzen 488 Millionen Buchstaben mehr, als der des andern. Wie viel Exemplare sind von beiden vorhanden?

$$x - y = 200 \text{ und } x^3 - y^3 = 488000000$$

$$\text{Also } \frac{x^3 - y^3}{x - y} = x^2 + xy + y^2 = 2440000$$

$$\text{Ferner ist } (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = 40000$$

$$\text{folglich } 3xy = 2400000$$

$$\text{und } x^2 + 2xy + y^2 = 3240000$$

Hieraus findet man $x + y = 1800$, und da $x - y = 200$, endlich $x = 1000$, $y = 800$.

6) Es mögen von zwei Büchern der erwähnten Art zusammen 1000 Exemplare vorräthig seyn, jedoch mit drei neu hinzugekommenen Bänden, wovon jeder so viel Seiten, und auf jeder so viel Buchstaben hat, als Ex. des andern Buches vorhanden sind. Der Vorrath des einen enthalte dabei 8 Mill. Buchstaben mehr, als der andere. Wie stark ist ein jeder?

$$x + y = 1000 \text{ und } (x^3 + 3x.y^2) - (y^3 + 3y.x^2) = 8000000.$$

Der letzte Ausdruck ist die Entwickelung von $(x-y)^3$, also findet man $x - y = 200$ und da $x + y = 1000$, endlich $x = 600$ und $y = 400$.

Viertes Kapitel.

Die allgemeine Potenzenrechnung.

115. Negative und gebrochene Exponenten. Die Definition der Potenz als eines Products aus gleichen Factoren scheint nur ganze Zahlenwerthe für den Exponenten zu gestalten, insofern dieser bestimmt, wieviel mal die gegebene Grundzahl oder Wurzel als Factor gesetzt werden soll. Allerdings kann man dieses Mehrmalige des Setzens nur durch eine ganze Zahl bestimmen, daneben aber auch noch ausdrücklich die Art und Weise bezeichnen, wie der

Grundfactor gesetzt werden soll, ob geradezu oder im widerstreitenden Sinne? Hierzu dient nun bekanntlich die Bezeichnung des Positiven und Negativen; ein n maliges Setzen des Grundfactors a, wie er gegeben ist, wird angedeutet durch a^{+n} oder a^n, ein n maliges Setzen desselben im widerstreitenden Sinne, (d. h. des Factors $\frac{1}{a}$) hingegen durch a^{-n}, welches mithin einerlei ist mit $\left(\frac{1}{a}\right)^n$. Will man endlich den Grundfactor a selbst als m^{te} Potenz eines andern (d. h. $a=b^m$) betrachten, so kann eine Zerlegung desselben in m gleiche Factoren b vorgenommen oder die m^{te} Wurzel ausgezogen werden, was man durch den gebrochenen Exponenten $\frac{1}{m}$ anzudeuten hat, da dieser durch seinen Nenner eine bestimmte Zerfällung vorschreibt; die Ausdrücke $a^{\frac{1}{m}}$ und $\sqrt[m]{a}$ sind mithin gleichbedeutend. Sollen von den m einzelnen Factoren wiederum k zu einer Potenz zusammengefaßt werden, so hat der Zähler des gebrochenen Exponenten diese Menge anzugeben, wie in $a^{\frac{k}{m}}=\left(\sqrt[m]{a}\right)^k$, $b^{\frac{4}{3}}=\left(\sqrt[3]{b}\right)^4$. Die hier betrachteten vier Fälle erscheinen in folgenden numerischen Beispielen:

1) $6^4=6.6.6.6=1296$. 2) $7^{-4}=\frac{1}{7}.\frac{1}{7}.\frac{1}{7}.\frac{1}{7}=\frac{1}{2401}$.

3) $64^{\frac{1}{2}}=\sqrt{64}=8$. 4) $125^{\frac{2}{3}}=\left(\sqrt[3]{125}\right)^2=5.5=25$.

116. Allgemeiner Begriff der Potenz. Da nun der Exponent die mit dem Grundfactor vorzunehmenden Zerlegungen und Zusammenfassungen nebst der Art und Weise, wie die Factoren zu einer neuen Potenz verbunden werden sollen, durch seine Bruchform und positive oder negative Bezeichnung vollständig darzustellen vermag, so darf man allgemein Potenz als eine Größe definiren, die aus der gegebenen Wurzel oder Grundzahl auf die nämliche Weise durch Zusammensetzung von Factoren, wie der sie bestimmende Exponent durch Zusammensetzung von Theilen aus der Einheit, entstanden ist. Wäre z. B. die Grundzahl $=8$ und der Exponent $=3, -3, \frac{2}{3}$; so entstehen beide zusammengehörige Größen folgendergestalt:

Exponent: $3=(1+1+1)$; $-3=(-1-1-1)$; $\frac{2}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$.

Potenz: $8^3=8.8.8$; $8^{-3}=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}$; $8^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{8}.\sqrt[3]{8}$.

117. Umformung der Potenzen. Das häufige Erscheinen der Potenzform in Berechnungen aller Art, zumal wenn dieselben in der allgemeinen Zeichensprache durch Buchstaben geführt werden, macht die Aufstellung besonderer Regeln für ihre Zusamenziehung oder Umgestaltung nothwendig, die durch folgende Hauptsätze begründet werden.

1) Wenn ein Product zu irgend einer Potenz erhoben werden soll, so kann man dieses an seinen einzelnen Factoren ausführen; denn es ist:

a) für ganze positive Exponenten $(a.b.c.d)^n=a.^n b.^n c.^n d^n$, weil es einerlei ist, ob man das Product oder jeden, in ihm enthaltenen, Factor n mal setzt. In dem Falle, daß $a=b=c=d..=k$, wird $(a.b.c..k)^n=(a^k)^n$ auch $=a.^n_1\ a.^n_2\ a^n_3\ \ldots.\ a^n_k=(a^n)^k$, und da einen Factor k und dann n mal, oder umgekehrt, ihn k. n mal setzen heißt, ebenfalls $=a^{kn}$.

b) für ganze negative Exponenten $(a.b.c.d)^{-n}=\frac{1}{(a.b.c.d.)^n}=\frac{1}{a.^n b.^n c.^n d^n}$; und da man diesen Ausdruck auch $=\frac{1}{a^n}\cdot\frac{1}{b^n}\cdot\frac{1}{c^n}\cdot\frac{1}{d^n}$ setzen kann, so ist $(a.b.c.d)^{-n}=a.^{-n}b.^{-n}c.^{-n}d.^{-n}$.

c) für gebrochene Exponenten $(a.b.c.d)^{\frac{1}{m}}=\sqrt[m]{(a.b.c.d)}$, und da ein Product a.b.c.d dadurch in m gleiche Factoren zerlegt wird, daß man jeden einzelnen seiner Factoren in solche zerfällt und die erhaltenen Wurzeln zusammenfaßt, auch $=\sqrt[m]{a.}\ \sqrt[m]{b.}\ \sqrt[m]{c.}\ \sqrt[m]{d}$ $=a.^{\frac{1}{m}}b.^{\frac{1}{m}}c.^{\frac{1}{m}}d.^{\frac{1}{m}}$. Noch allgemeiner ist $(a.b.c.d)^{\frac{k}{m}}=$

$$4a\sqrt[3]{2b}+\sqrt[3]{16a^3b}=4a\sqrt[3]{2b}+2a\sqrt[3]{2b}=6a\sqrt[3]{2b}.$$

$$10\sqrt[3]{32a^3b}-\tfrac{5}{a}\sqrt[3]{4a^6b}=20a\sqrt[3]{4b}-5a\sqrt[3]{4b}=15a\sqrt[3]{4b}.$$

$$\sqrt{18a^5b^3}+\sqrt{50a^3b^3}=3a^2b\sqrt{2ab}+5ab\sqrt{2ab}$$
$$=(3a+5)ab\sqrt{2ab}.$$

$$\sqrt[3]{\frac{27a^5}{2b}}-\sqrt[3]{\frac{a^2}{2b}}=3a\sqrt[3]{\frac{a^2}{2b}}-\sqrt[3]{\frac{a^2}{2b}}=$$
$$(3a-1)\sqrt[3]{\frac{a^2}{2b}}$$

120. **Multiplication der Potenzen.** Sollen mehrere Potenzen desselben Grundfactors mit einander multiplicirt werden, so erhält man als ihr Product eine Potenz jenes Grundfactors, deren Exponent durch Addition derjenigen der einzelnen Factoren entsteht. Denn es ist:

a) für ganze positive Exponenten $a^m.a^n.a^p=a^{m+n+p}$, weil nach beiden Andeutungen der Grundfactor $(m+n+p)$ mal gesetzt werden soll.

b) für ganze negative Exponenten $a^{-m}.a^{-n}.a^{p}$

$$\frac{1}{a^m}\cdot\frac{1}{a^n}\cdot\frac{1}{a^p}=\frac{1}{a^{(m+n+p)}}=a^{-(m+n+p)}$$

c) für gebrochene Exponenten $a^{\frac{m}{p}}.a^{\frac{n}{q}}.a^{\frac{r}{s}}=\sqrt[p]{a^m}.$

$$\sqrt[q]{a^n}.\sqrt[s]{a^r}=\sqrt[pqs]{a^{mqs}}.\sqrt[pqs]{a^{nps}}.\sqrt[pqs]{a^{rpq}}$$
$$=\sqrt[pqs]{a^{mqs+nps+rpq}}=a^{\frac{mqs+nps+rpq}{pqs}}.$$
$$=a^{\frac{m}{p}+\frac{n}{q}+\frac{r}{s}}.$$

121. **Division der Potenzen.** Wenn verschiedene Potenzen desselben Grundfactors einander dividiren, so ist der Quotient in der einfachsten Gestalt eine Potenz dieses Grundfactors, deren Exponent durch Subtraction des Exponenten des Divisors von dem des Dividendus entsteht. — Denn es ist:

a) für ganze positive Exponenten: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$,

welcher der beiden Exponenten auch der größere seyn mag. Wenn nämlich $n < m$, so heben sich n gleiche Factoren im Zähler und Nenner, und es bleiben in jenem $m-n$. Ist aber $n > m$, so heben sich m gleiche Factoren, und im Nenner bleiben $n-m$; also wird $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$ $= a^{-(n-m)} = a^{m-n}$, übereinstimmend mit dem obigen Ausdrucke. In dem besondern Falle, wo $m = n$, wird $\frac{a^m}{a^n}$ dem Werthe nach $= 1$, der Form nach $= a^{m-m}$ $= a^0$, woraus man sieht, daß unter der 0ten Potenz jedes beliebigen Grundfactors nichts anders, als die Einheit zu verstehen ist.

b) für ganze, negative Exponenten: $\frac{a^{-m}}{a^{-n}} =$

$$\frac{\left(\frac{1}{a^m}\right)}{\left(\frac{1}{a^n}\right)} = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = a^{-m+n}.$$

c) für gebrochene Exponenten: $\frac{a^{\frac{m}{p}}}{a^{\frac{n}{r}}} = \frac{\sqrt[p]{a^m}}{\sqrt[r]{a^n}} =$

$$\frac{\sqrt[rp]{a^{rm}}}{\sqrt[rp]{a^{pn}}} = \sqrt[rp]{\left(\frac{a^{rm}}{a^{pn}}\right)} = \sqrt[rp]{a^{rm-pn}} = a^{\frac{rm-pn}{rp}}$$

$$= a^{\frac{m}{p}-\frac{n}{r}}.$$

122. Potenzirung der Potenzen. Soll eine Potenz zu einer andern von gegebenen Exponenten erhoben werden, so geschieht dieses durch Multiplication der beiden Exponenten. Denn es ist:

a) für ganze positive Exponenten: $(a^m)^n = a^{mn}$, wie oben (§. 117) bereits erklärt worden.

b) für ganze negative Exponenten: $(a^m)^{-n} = \frac{1}{(a^m)^n} = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn}$; und eben so $\left(a^{-m}\right)^n = \left(\frac{1}{a^m}\right)^n = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn}$.

c) für gebrochene Exponenten: $\left(a^{\frac{m}{p}}\right)^{\frac{n}{r}} = \sqrt[r]{\left(\sqrt[p]{a^m}\right)^n} = \sqrt[r]{\sqrt[p]{a^{mn}}} = \sqrt[rp]{a^{mn}} = a^{\frac{m}{p}\cdot\frac{n}{r}}$.

123. Zeichen der Potenzen. Die positive oder negative Bezeichnung der Potenzen hängt zugleich von Grundfactor und Exponenten ab, und läßt sich aus beiden ohne Schwierigkeit abnehmen. Denn:

I) Ist der Grundfactor positiv, so erhält jede Potenz desselben das positive Vorzeichen oder ist wenigstens Wurzel aus einer positiven Größe, indem

a) für ganze positive Exponenten: $(+a)^m = +\left(a^m\right)$;

b) für ganze negative Exponenten: $(+a)^{-m} = \frac{1}{(+a)^m} = +\frac{1}{a^m}$;

c) für gebrochene Exponenten: $(+a)^{\frac{k}{m}} = \sqrt[m]{(+a^k)}$.

II) Ist der Grundfactor negativ, so werden die Potenzen von geradem Range (z. B. $-a^5$, $-a^{\frac{4}{3}}$) ebenfalls positiv, die von ungeradem Range (z. B. $-a^2$, $-a^{\frac{3}{7}}$, $a^{\frac{5}{3}}$) hingegen negativ oder Wurzeln aus einer negativen Größe. Denn es ist:

A) für gerade Exponenten:

a) für ganze positive Exponenten: $(-a)^2 = (-a)(-a) = +a^2$; $(-a)^4 = +a^4$; .... $(-a)^{2n} = +a^{2n}$.

b) für ganze negative Exponenten $(-a)^{-1} = \frac{1}{(-a)(-a)} = +\left(\frac{1}{a^2}\right)$; $(-a)^{-4} = +\left(\frac{1}{a^4}\right)$; .... $(-a)^{-2n} = +\left(\frac{1}{a^n}\right)$.

c) für gebrochene Exponenten $(-a)^{\frac{2}{n}} = \sqrt[n]{(-a)^2} = \sqrt[n]{a^2}$; $(-a)^{\frac{4}{n}} = \sqrt[n]{a^4}$; .... $(-a)^{\frac{2k}{n}} \sqrt[n]{a^{2k}}$.

B) für ungerade Exponenten:

a) für ganze positive Exponenten: $(-a)^3 = (-a)(-a)(-a) = -(a^3)$; $(-a)^5 = -(a^5)$; ... $(-a)^{2n+1} = -(a^{2n+1})$.

b) für ganze negative Exponenten: $(-a)^{-3} = \frac{1}{(-a)(-a)(-a)} = \frac{1}{-(a^3)} = -\left(\frac{1}{a^3}\right)$; $(-a)^{-5} = -\left(\frac{1}{a^5}\right)$; .... $(-a)^{-2n+1} = -\left(\frac{1}{a^{2n+1}}\right)$.

c) für gebrochene Exponenten: $(-a)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{-a}$; $(-a)^{\frac{3}{n}} = \sqrt[n]{-a^3}$; ..... $(-a)^{\frac{2k+1}{n}} = \sqrt[n]{-a^{2k+1}}$.

124. Zeichen der Wurzeln. Nach dem Vorhergehenden ist das Zeichen der Wurzel völlig bestimmt, wenn der Exponent der gegebenen Potenz von ungerader Zahl ist, weil es in diesem Falle mit dem Zeichen der Potenz übereinstimmen muß; $\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = +a$ und $\sqrt[2n+1]{-a^{2n+1}} = -a$. Durchaus unbestimmt bleibt hingegen das Zeichen alsdann, wenn eine Wurzel von gerader Zahl aus einer positiven Größe, die als ihre Potenz betrachtet wird, gezogen werden soll, weil diese eben so wohl aus einem negativen, als einem positiven Grundfactor entstanden seyn kann: $\sqrt[2n]{a^{2n}} = +a$ oder $-a$. Diese Unbestimmtheit, welche in besondern Fällen der Rechnung, wo die Natur der Betrachtung nur einen der beiden Werthe, entweder $+a$ oder $-a$ zuläßt, freilich verschwindet, deutet man im Allgemeinen durch ein, dem Radicalzeichen mit geradem Wurzelexponenten vorgesetztes

Doppelzeichen ($\pm$) an, z. B. $\sqrt{b}$ durch $\pm\sqrt{b}$; $\sqrt[4]{b}$ durch $\pm\sqrt[4]{b}$, um auf die Zweideutigkeit der Wurzel aufmerksam zu machen.

125. Zahlform unmöglicher Größen. Der im Vorhergehenden nicht erwähnte Fall einer Wurzelausziehung von geraden Exponenten aus einer negativen Zahl läßt durchaus keine Annahme einer wirklichen Wurzel, sie sey positiv oder negativ, zu: denn $-a^{2n}$ kann durch $2n$ maliges Setzen von $-a$ so wenig, als von $+a$ entstanden seyn, so daß sich gar keine wirkliche Wurzel dafür denken läßt, wie dieses schon bei Gelegenheit der Ausziehung der Quadratwurzel aus negativen Zahlen bemerkt werden mußte. Nichts destoweniger darf man die Anbeutung solcher unausführbarer Wurzelausziehungen von den Zahlformen nicht ausschließen, sondern muß sie da, wo sie als solche in der Rechnung auftreten, den allgemeinen Regeln der Arithmetik gemäß behandeln, wenn sie gleich imaginäre oder unmögliche Zahlenwerthe darstellen. Am Ende der Berechnung können sie gänzlich verschwunden seyn und ein Resultat in durchaus bestimmten Zahlen geben, indem mehrere als Factoren zu einem reellen Producte sich vereinigen. Dieß geschieht bei der Potenzirung des allgemeinen Ausdrucks $a\sqrt{-1}$, wenn die Exponenten gerade Zahlen sind, während bei ungeraden Exponenten der Factor $\sqrt{-1}$ stets wieder zum Vorschein kommt.

So ist $(a\sqrt{-1})^2 = -a^2$ und $(a\sqrt{-1})^3 = -a^3\sqrt{-1}$

$(a\sqrt{-1})^4 = +a^4$ $\quad$ $(a\sqrt{-1})^5 = +a^5\sqrt{-1}$

$(a\sqrt{-1})^6 = -a^6$ $\quad$ $(a\sqrt{-1})^7 = -a^7\sqrt{-1}$

$(a\sqrt{-1})^8 = +a^8$ $\quad$ $(a\sqrt{-1})^9 = +a^9\sqrt{-1}$

u. s. w. $\quad$ u. s. w.

Man muß sich hüten, die für mögliche Zahlen aller Art gültige Regel $\sqrt{a}.\sqrt{b} = \sqrt{a.b}$ auf die imaginären ohne Ueberlegung anzuwenden, weil ihr zufolge z. B. $\sqrt{-1}.\sqrt{-1} = \sqrt{+1} = \pm 1$ seyn würde, während -1 der einzige richtige Werth ist. Solchen Irrungen entgeht man am besten durch den Gebrauch eines besondern Zeichens i für $\sqrt{-1}$ und die Bemerkung der Potenzen:

i, i^5, i^9, i^{13}..... i^{1+4n} positive imaginäre
i^3, i^7, i^{11}, i^{15}..... i^{3+4n} negative imaginäre
i^2, i^6, i^{10}, i^{14}..... i^{2+4n} negative mögliche
i^4, i^8, i^{12}, i^{16}..... i^{0+4n} positive mögliche

Werthe geben. So ist z. B. $(ai)^7+(bi)^8 = -a^7.i+b^8$.

126. Anwendungen.

1) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 1$. Denn $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$.

2) $(\sqrt{8}+\sqrt{2})^2 = 18$. Denn $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$.

3) $\frac{3+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{(3+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = \frac{-\sqrt{2}+1}{-1} = \sqrt{2}-1$.

4) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

5) $\frac{\sqrt{2}+3\sqrt{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{4.\frac{1}{2}}+3\sqrt{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{(2+3)\sqrt{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} = 10$.

6) $(a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})$ oder $(a+bi)(a-bi) = a^2-b^2$.

7) $(a-bi)^3 = a^3-3a^2bi+3ab^2-b^3i$.

8) $(a+bi)^2.(a-bi)^2 = (a+bi.a-bi)^2 = (a^2+b^2)^2 = a^4+2a^2b^2+b^4$.

9) $\sqrt{(a+\sqrt{b})}$ sei $= \sqrt{p}+\sqrt{q}$, so ist $a+\sqrt{b} = q+2\sqrt{pq}+q$, und wenn man $a = p+q$, $b = 4pq$ setzt, so finden sich hieraus (nach 104 A. 6) die Werthe $p = \frac{a}{2}+\frac{\sqrt{a^2-b}}{2}$ und $q = \frac{a}{2}-\frac{\sqrt{a^2-b}}{2}$, also

$$\sqrt{(a+\sqrt{b})} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-b})}+\sqrt{\tfrac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-b})}.$$

10) $\sqrt{(a+\sqrt{-b})}$ sei $= \sqrt{p}+\sqrt{q}$, so ist $a+\sqrt{-b} = p+2\sqrt{pq}+q$, und wenn $a = p+q$, $b = -4pq$ gesetzt wird, so erhält man als Werth von $p = \frac{a}{2}$

$$+, \frac{\sqrt{a^2+b}}{2} \text{ und } q = \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2+b}}{2} \text{ also}$$

$$\sqrt{(a+\sqrt{-b})} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(a+\sqrt{a^2+b})} + \sqrt{\tfrac{1}{2}(a-\sqrt{a^2+b})}.$$

Fünftes Kapitel.

Die Logarithmen.

127. **Begriff der Log.** Der Exponent, welcher angiebt, auf welche Potenz eine gegebene Grundzahl K erhoben werden muß, um eine beliebige andere Zahl A hervorzubringen, wird der *Logarithmus* dieser Zahl in Beziehung auf K genannt Also ist die Größe a in der Gleichung $K^a = A$ nach der herkömmlichen Benennung und Beziehungsart = log. A, d. h. *der zur Zahl A im Potenzensysteme der Grundzahl K gehörige Logarithmus*; so findet man z. B. wenn K = 7, log. 243 = 3, weil $7^3 = 243$: oder wenn K = 5, log. 625 = 4, weil $5^4 = 625$. Es kann mithin die nämliche Zahl verschiedene Logarithmen haben, jenachdem man sie als Potenz verschiedener Grundzahlen ansieht: so ist z. B.

wenn K = 2, log. 64 = 6, weil $2^6 = 64$.
= 4, log. 64 = 3, weil $4^3 = 64$.
= 8, log. 64 = 2, weil $8^2 = 64$.

Der Werth des Logarithmus ist also zugleich von dem der Grundzahl K und der gegebenen Zahl A abhängig und muß aus diesen *beiden* Größen sich bestimmen lassen. Man sieht leicht, daß, wenn K *positiv* gedacht wird, Logarithmen für *negative* Zahlen unmöglich sind, indem K^x, welches auch immer der Werth von x seyn mag, nie einen negativen Zahlenwerth annehmen kann.

128. **Berechnung der Logarithmen.** Denkt man sich durch die Erhebung irgend eines Grundfactors zur Potenz eines ganzen und positiven Exponenten eine Zahlenreihe gebildet, so wird dieselbe um so lückenhafter ausfallen, je größer der Grundfactor ist, wie die Vergleichung folgender Reihen zeigt.

wenn a =	1	2	3	4	5
so ist 2^a =	2	4	8	16	32
... 4^a =	4	16	64	256	1024
... 6^a =	6	36	216	1296	7776
... 8^a =	8	64	512	4096	32768
... 10^a =	10	100	1000	10000	100000

Für jede andere, zwischen die Potenzen einer solchen beschränkten Zahlenreihe fallende, ganze Zahl muß der zugehörige Exponent oder Logarithmus offenbar ein Bruch seyn. Will man die Berechnung ohne Hülfe der Analysis (§. 191, 192) vornehmen, so wird sie durch die große Menge von Wurzelausziehungen, wodurch man sich dem wahren Werthe des Logarithmus immer mehr zu nähern suchen muß, sehr beschwerlich. Soll z. B. log. 50 für K = 10 berechnet werden, so findet man, den zwischen 1 und 2 liegenden Exponenten $\frac{3}{4}$ wählend, $10^{\frac{3}{4}} = \sqrt{1000} = 31,6$, also weniger als 50. Nun liegt als arithmetisches Mittel zwischen $\frac{3}{4}$ und 2 der Zahlenwerth $\frac{7}{4}$ und da $10^{\frac{7}{4}} = \sqrt[4]{10^7} = \sqrt{(\sqrt{10000000})} = 56,2$, also mehr, als 50 beträgt, so muß log. 50 zwischen $\frac{3}{4}$ und $\frac{7}{4}$ enthalten sein, und durch Fortsetzung des hier eingeschlagenen Verfahrens noch näher bestimmt werden können. Man kann diese Berechnungsart der Log. folgendermaßen aussprechen: So lange von zwei Exponenten m und n der eine mehr, der andere weniger, als die gegebene Zahl hervorbringt, deren Log. gesucht wird, nehme man eine zwischen jene beiden in die Mitte fallende $\left(\frac{m+n}{2}\right)$, und fahre damit so lange fort, bis die zu einem der versuchten Exponenten gehörige Potenz mit der gegebenen Zahl nahe genug, d. h. bis zu einer bestimmten Decimalstelle zusammenfällt.

129. Logarithmentafeln. Man findet die zur Grundzahl 10 gehörigen Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 10000

oder 100000, bis auf 5 oder 7 Decimalstellen berechnet, in den gebräuchlichen Tafeln der (gemeinen oder Briggischen) Logarithmen zusammengestellt. Diese geben sowol den Log. einer bestimmten Zahl, die man als Potenz von 10 betrachtet, als auch umgekehrt für jeden gegebenen Logarithmus die entsprechende Zahl im dekadischen Systeme, nur muß man dem Log. noch die ganze Zahl vorsetzen, welche den Rang der gegebenen bestimmt und leicht aus der Menge ihrer Ziffern erkannt wird. So findet man z. B. als log. 5165 die Zahl 7130703, welcher 3 als Rangzahl der Tausende vorzusetzen ist, und hat folglich

log. 516500 = 5,7130703
log. 516,5 = 2,7130703
log. 5,165 = 0,7130703

Man nennt den Inbegriff der in den Tafeln enthaltenen Decimalstellen eines Log. seine Mantisse und die von dem Rechner vorzusetzende ganze Rangzahl die Kennziffer oder Characteristik desselben. Jene bezieht sich auf die Ziffern, welche eine Zahl bilden und ist die nämliche für gleichzifrige von verschiedenem Range, wie in vorstehendem Beispiele. Beim Aufschlagen eines Log. kommt sie allein in Betracht, bei der Angabe des Ranges der gegebenen Zahl allein die Kennziffer. Eben so erhält man umgekehrt beim Aufschlagen einer Zahl zu einem gegebenem Log. durch die Tafeln deren Ziffern, durch die Characteristik ihren Rang. Es ist z. B.

9630319 Mantisse von Log. 9184....
also 0,9630319 = log. 9,184
4,9630319 = log. 91840
7,9630319 = log. 91840000.

130. Proportionaltheile. Will man für eine größere Zahl, welche in den Logarithmentafeln nicht enthalten ist, den zugehörigen Logarithmus finden, so muß man diejenigen beiden Zahlen aufschlagen, zwischen welche (wenn man die gehörigen Nullen anhängt) die gegebene fallen würde, und die Logarithmen derselben von einander abziehen. Von dieser Differenz ist dann dem Logarithmus der kleineren Zahl ein, dem Ueberschuß der gegebenen über dieselbe proportionaler, Theil noch hinzuzufügen, um den gesuchten Logarithmus zu bestimmen. Bezeichnen wir die gegebene Zahl

mit N, die beiden benachbarten, in den Tafeln enthaltenen, mit M und P, so wie ihre Logarithmen mit m und p, so ergiebt sich der gesuchte Werth für n = m + x aus der Verhältnißgleichung

$$\frac{x}{p-m} = \frac{N-M}{P-M}$$

$$\text{als } n = m + x = m + \left(\frac{N-M}{P-M}\right)(p-m).$$

So finden wir z. B. log. 856742 mit Hülfe der kleineren Tafeln durch Aufschlagen von log. 856700 = 5,93283 und log. 856800 = 5,93288. Die Differenz der Zahlen ist hier = 100, die ihrer Logarithmen = 5, und der Ueberschuß der gegebenen über die kleinere Zahl = 42, folglich

$$\frac{x}{5} = \frac{42}{100}$$

mithin $x = \frac{42.5}{100} = 2{,}10$ und log. 856742 = log. 856700 + x = 5,93285.

Wäre umgekehrt der Logarithmus n gegeben, und die zugehörige Zahl N genauer zu bestimmen, als die Tafeln sie unmittelbar darbieten, so dient dasselbe Verfahren, um die gewünschten späteren Ziffern (Z) derselben aufzufinden. Hier ist nämlich

$$\frac{Z}{P-M} = \frac{n-m}{p-m}$$

$$\text{also } N = M + Z = M + \left(\frac{n-m}{p-m}\right)(P-M).$$

Man suche z. B. die Zahl für den Logarithmus 5,31456 bis auf die Einer genau, so geben die kleineren Tafeln

5,31471 = log. 206400
5,31450 = log. 206300;

der Unterschied der Zahlen ist hier = 100, der der Logarithmen = 21, und der Ueberschuß des gegebenen über dem kleinern = 6, folglich

$$\frac{Z}{100} = \frac{6}{21},$$

$$\text{also } Z = \frac{600}{21} = 29, \text{ und } N = 206300 + 29 = 206329.$$

Die größeren logarithmischen Tafeln erleichtern die genaue Auffindung von Zahlen und Logarithmen durch Angabe dieser Proportionaltheile (partes proportionales) für jede der unvollständigen Zahl noch hinzuzufügende Ziffer in einer besondern Spalte am Ende. Will man mehrere Ziffern hinzufügen, oder deren Einfluß auf den Logarithmus angeben, so muß man — weil ihr Rang mit der Stelle abnimmt — auch die entsprechenden Proportionaltheile stets um eine Stelle zurücksetzen. Werde z. B. log. 95429648 gesucht, so finden wir

mant. log. 95429	=	9796804
p. p. 6	=	27
p. p. 4	=	18
p. p. 8	=	36
Summe	=	9796833,16

Also log. 95429648 = 7,9796833.

131. Negative Logarithmen. Da eine Potenz mit ganzem negativen Exponenten, wenn die Grundzahl $K > 1$, ein ächter Bruch seyn muß, so können in dem gemeinen Logarithmensystem negative Logarithmen nur zu gebrochenen Zahlenwerthen gehören. Ist log. $A = a$, also $10^a = A$, so folgt, daß $\frac{1}{A} = \frac{1}{10^a} = 10^{-a}$, und log. $\left(\frac{1}{A}\right) = -a$. Man findet mithin die zu einem negativen Logarithmus gehörige Zahl, indem man die des positiven aus den Tafeln nimmt und als Nenner eines Bruches ansetzt, dessen Zähler die Einheit ist. Umgekehrt wird der Logarithmus eines ächten Bruches dadurch bestimmt, daß man ihn in einen Decimalbruch verwandelt, für denselben wie für eine ganze Zahl, den Logarithmus aufschlägt und statt eine positive Kennziffer der Mantisse vorzusetzen, die negative Rangzahl des Decimalbruchs ihr nachsetzt, oder die Differenz beider nimmt. So ist z. B. log. $\frac{4}{7}$ = log. 0,42857 = 0,6320218 — 1 = —0,3679782, und umgekehrt die Zahl für diesen Logarithmus aus den Tafeln $\frac{1}{2,3333}$ (weil 0,3679782 = log. 2,3333), welches mit dem Bruche $\frac{3}{7}$ vollkommen übereinstimmt, da $\frac{7}{3}$ =

2,3333 und $\frac{3}{7} = \frac{1}{\left(\frac{7}{3}\right)}$ ist. (Eine andere Regel, den Log. eines Bruchs zu finden, folgt aus Nr. II. des folgenden §.)

132. Die Rechnungsarten mit Logarithmen. Wenn man die vier Grundoperationen mit Logarithmen vornimmt, so lassen sich dadurch große und weitläufige Rechnungen, namentlich die nur in besondern Fällen zu leistende Wurzelausziehung ohne besondere Mühe ausführen. Diese Erleichterung und Abkürzung der Rechnung, wodurch der Gebrauch der Logarithmentafeln für die practische Arithmetik so wichtig erscheint, beruht auf den im vorigen Capitel entwickelten allgemeinen Regeln der Potenzenrechnung, welche in Beziehung auf die Logarithmen folgendergestalt ausgesprochen werden müssen.

I. Die Addition der Logarithmen zweier Zahlen giebt zur Summe den Log. ihres Products. Wenn $A = 10^a$ und $B = 10^b$, so ist $A.B. = 10^{a+b}$, mithin $a + b = \log.(A.B.)$ Um also das Product zweier Zahlen zu berechnen, addire man ihre Logarithmen und suche die der Summe entsprechende Zahl in den Tafeln auf: z. B. 243. 49,5

$$\begin{aligned} \log.\ 243 &= 2{,}38560 \\ +\log.\ 49{,}5 &= 1{,}69460 \\ \hline 4{,}08020 &= \log.\ 12038. \end{aligned}$$

II. Die Subtraction der Logarithmen zweier Zahlen giebt zur Differenz den Log. ihres Quotienten. Wenn $P = 10^p$ und $D = 10^d$, so ist $\frac{P}{D} = \frac{10^p}{10^d} = 10^{p-d}$, mithin $p - d = \log.\left(\frac{P}{D}\right)$. Man berechnet also den Quotienten zweier Zahlen durch Abziehen ihrer Logarithmen und Aufschlagen des Unterschiedes derselben in den Tafeln; z. B. $\frac{45372}{736{,}4}$:

$$\begin{aligned} \log.\ 45372 &= 4{,}65679 \\ -\log.\ 736{,}4 &= 2{,}86711 \\ \hline 1{,}78968 &= \log.\ 61{,}61. \end{aligned}$$

III. Die Multiplication des Logarithmus einer Zahl durch eine andere giebt zum Product den Log. ihrer gleichnamigen Potenz: Wenn $A = 10^a$, so ist $A^m = (10^a)^m = 10^{am}$, also $m.a = \log.(A^m)$. Soll man mithin eine Zahl zu einer höhern Potenz erheben, so geschieht dieß bei Anwendung der Logarithmen durch einfache Multiplication des Log. mit dem Exponenten: z. B. $4{,}23^5$.

$$\log. 4{,}23 = 0{,}62634$$
$$\times 5$$
$$3{,}13170 = \log. 1354.$$

IV. Die Division des Logarithmus einer Zahl durch eine andere giebt giebt zum Quotienten den Log. der gleichnamigen Wurzel aus jener Zahl: Wenn $A = 10^a$, so ist $\sqrt[k]{A} = \sqrt[k]{10^a} = 10^{\frac{a}{k}}$, also $\frac{a}{k} = \log.(\sqrt[k]{A})$. Die Wurzelausziehung geschieht folglich sehr einfach durch Division des Logarithmus; z. B. $\sqrt[13]{4915000}$:

$$\log. 4915000 = 6{,}69152$$
$$:13$$
$$0{,}51473 = \log. 3{,}271$$

133. Dekadische Ergänzung. Ein besonderes Erleichterungsmittel für die logarithmische Rechnung besteht darin, daß man auch für die Divisoren eines Ausdrucks, deren Logarithmen negativ angesetzt werden müßten, additive einführt, indem man die dekadische Ergänzung complementum logarithmi) jener nimmt. Soll $\frac{A}{B}$ durch Logarithmen berechnet werden, so geschieht dieses nach dem Ausdruck log. A − log. B. Damit ist nun die Form log. A + (10 − log. B) − 10 durchaus einerlei, gewährt aber den Vortheil, daß bei ihrem Gebrauch die dekadische Ergänzung (10 − log B) addirt wird, wo man sonst log. B subtrahiren müßte. Dieß gilt für beliebig viele Divisoren, bei denen d. E. jedoch immer die angehängten − 10 zu beachten und im Resultat zu subtra-

hiren sind, wenn dasselbe den Log. des gesuchten Quotienten geben soll. Das allgemeine Schema für dieses Verfahren ist:

$$\log.\left(\frac{A.\ C.\ E..}{B.\ D.\ F..}\right) = \log. A + \log. C + \log. E + \text{etc.}$$
$$+ \text{compl. log. } B - 10 + \text{c. log. } D - 10 + \text{etc.}$$

und ein Beispiel in Zahlen das folgende:

$$\log.\left(\frac{3240.\ 5698}{273.45.6812}\right) = \log. 3240 = 3{,}51055$$
$$+ \log. 5698 = 3{,}75572$$
$$+ \text{c. log. } 273 = 7{,}56384 - 10$$
$$+ \text{c. log. } 45 = 8{,}34679 - 10$$
$$+ \text{c. log. } 6812 = 6{,}16673 - 10$$
$$31{,}34363 - 30$$

d. h. 1,34363; der Log. von 22,06.

134. Exponentialgrößen. Durch die Logarithmen ist man im Stande, auch solche Gleichungen zu lösen, in denen die unbekannte Größe im Exponenten enthalten oder eine Exponentialgröße ist, indem man Regel 4 aus §. 132 auf dergleichen Ausdrücke anwendet. Sey z. B.

$$A^{mx+a} \cdot B^{nx+b} = C^{px+c}$$

die gegebene Gleichung, worin die unbekannte Größe x aus den bekannten zu bestimmen ist, so hat man:

$$(mx+a)\log. A + (nx+b)\log. B = (px+c)\log. C$$

und nach gehöriger Auflösung:

$$x = \frac{\text{c. log. } C - a.\ \log. A - b.\ \log. B}{m\ \log. A + n.\ \log. B - p.\ \log. C}$$

Sechstes Kapitel.

Die Progressionen.

135. **Differenz und Factorenreihen.** Es giebt für die gesetzmäßige Bildung einer fortlaufenden Zahlenreihe durch Anwendung der Grundoperationen zwei Wege: die Glieder entstehen nämlich, eines aus dem andern, durch Addition desselben *Theils* oder durch Multiplication mit demselben *Factor*. Von der ersten Art sind die Reihen

1 3 5 7 9 11 13 15 ....
100 97 94 91 88 85 82 79 ....

allgemein a $(a+d)$ $(a+2d)$ $(a+3d)$ $(a+4d)$ $(a+5d)$ .... $(a+nd)$;

von der zweiten Art die folgenden:

1 2 4 8 16 32 64 128...
729 243 81 27 9 3 1 $\frac{1}{3}$...

allgemein a af af^2 af^3 af^4 af^5 af^6.... af^n.

Jene würde man am passendsten *Differenz-*, diese *Factoren-Reihen* nennen, gebraucht aber nach altem Herkommen allgemeiner die (von einer ganz speciellen Anwendung hergenommenen) Benennungen von *arithmetischen* oder *geometrischen Progressionen*. Beide können *steigend* oder *fallend* seyn, jenachdem die Differenz d *additiv* oder *subtractiv* und der Factor f *größer* oder *kleiner* als die Einheit ist.

136. **Arithmetische Progression.** Aus dem gleichförmigen Fortschritte einer Zahlenreihe mit gleichen Differenzen ergiebt sich ein bestimmter Zusammenhang zwischen dem Anfangsgliede a, dem letzten u, der Differenz d, der Menge der Glieder n, und ihrer Summe s, wonach man aus drei bekannten dieser Stücke jederzeit das vierte unbekannte finden kann. Da nämlich die Zunahme der Glieder, vom ersten und die Abnahme vom letzten an gerechnet, gleichmäßig fortschreiten, so müssen je zwei, vom Anfangs- und Endgliede gleichweit abstehende Glieder dieselbe Summe, wie diese geben, und man

darf den Werth jedes solchen Gliederpaars $= a + u$ nur mit der Anzahl aller Paare $= \frac{1}{2} n$ multipliciren, um den Ausdruck für die Summe der Reihe, und daraus durch Umformung die übrigen Formeln zu erhalten.

$$\text{I. } s = \frac{n}{2}(a+u) \qquad \text{V. } u = a + (n-1)\,d$$

$$\text{II. } a = \frac{2s}{n} - u \qquad \text{VI. } a = u - (n-1)\,d$$

$$\text{III. } u = \frac{2s}{n} - a \qquad \text{VII. } d = \frac{u-a}{n-1}$$

$$\text{IV. } n = \frac{2s}{a+u} \qquad \text{VIII. } n = \frac{u-1}{d} + 1$$

Durch Elimination lassen sich aus diesen 8 noch andere 12 Gleichungen unter den Größen a, u, d, n, s ableiten.

137. Geometrische Progression. Für die Factorenreihe findet man den, ebenfalls in 20 verschiedenen Formeln darstellbaren, Zusammenhang zwischen dem Anfangsgliede a, dem Factor f, dem Endgliede u, der Anzahl der Glieder n, und ihrer Summe s dadurch, daß man von der, mit f multiplicirten, die einfache Reihe abzieht. Denn es ist, wenn

$$\begin{array}{l} a + af + af^2 + af^3 + af^4 \ldots\ldots + af^{n-1} = s \\ af + af^2 + af^3 + af^4 + \ldots + af^{n-1} + af^n = sf \end{array}$$

die Differenz $af^n - a = sf - s$, also

$$\text{I. } s = \frac{a(f^n-1)}{f-1} \qquad \text{V. } u = af^{n-1}$$

$$\text{II. } a = \frac{s(f-1)}{f^n-1} \qquad \text{VI. } a = \frac{u}{f^{n-1}}$$

$$\text{III. } f^n - \frac{s}{a} f = 1 - \frac{s}{a} \qquad \text{VII. } f = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$$

$$\text{IV. } f^n = \left(\frac{sf-s+a}{a}\right) \qquad \text{VIII. } f^{n-1} = \frac{u}{a}.$$

Die Werthe von n ergeben sich aus Formel 4 und 8 nur mit Hülfe der Logarithmen nach §. 134. Die dritte Formel ist zur wirklichen Berechnung von f unbrauchbar. Zwölf andere lassen sich auch hier durch Elimination finden.

Es ist zu bemerken, daß zwei Factorenreihen des nämlichen Factors und von gleicher Gliederzahl zu einander im Verhältniß ihrer Anfangsglieder stehen. Denn man hat

$$a+af+af^2+\text{etc.} : b+bf+bf^2+\text{etc.} = a(1+f+f^2\ldots) : b(1+f+f^2\ldots) = a : b.$$

138. Abnehmende Progression. Ist der Factor der geometrischen Progression ein ächter Bruch, so bewirkt er eine, der Gränze o sich immer mehr nähernde, Verminderung ihrer Glieder. Da aber deren Anzahl in diesem Falle als unendlich (∞) betrachtet werden muß, so kann man die Reihe als Entwickelung des Ausdrucks

$$\frac{a}{1-f} = a+af+af^2+af^3+af^4\ldots\ldots+af^n,$$

und diesen selbst als ihren geschlossenen Werth oder ihre Summe ansehen. Ist $a=f$, so wird

$$\frac{f}{1-f} = f+f^2+f^3+f^4+f^5\ldots\ldots+f^n$$

Hiernach lassen sich periodische Decimalbrüche, wie in folgenden Beispielen auf geschlossene Bruchformen zurückführen.

1) $0{,}040404\ldots = \frac{4}{100}+\frac{4}{100}\left(\frac{1}{100}\right)+\frac{4}{100}\left(\frac{1}{100}\right)^2+\text{etc.}$

$$= \frac{\left(\frac{4}{100}\right)}{\left(1-\frac{1}{100}\right)} = \frac{4}{99}.$$

2) $0{,}156156\ldots = \frac{156}{1000}+\frac{156}{1000}\left(\frac{1}{1000}\right)+$

$$\frac{156}{1000}\left(\frac{1}{1000}\right)^2+\text{etc.} = \frac{\left(\frac{156}{1000}\right)}{\left(1-\frac{1}{1000}\right)} = \frac{156}{999}$$

3) $0{,}111111\ldots = \frac{1}{10}+\frac{1}{10}\left(\frac{1}{10}\right)+\frac{1}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^2$

$$+\text{etc.} = \frac{\left(\frac{1}{10}\right)}{\left(1-\frac{1}{10}\right)} = \frac{1}{9}$$

139. Zinsrechnung. Die Progressionen finden die mannigfachste Anwendung, u. A. in der einfachen und zusammengesetzten Zinsrechnung, wo der Zusammenhang eines Capitals C, seines Ertrages E nach n Jahren und des Zinsfußes

f in allgemeinen Formeln dargestellt wird, die es möglich machen, jede einzelne dieser Größen aus den drei andern gegebenen zu bestimmen.

A. Einfache Zinsrechnung.

Nimmt man an, daß die am Ende eines jeden Jahres fälligen Zinsen nicht zum Capital geschlagen werden und dieses fortgesetzt vermehren dürfen, so wächst dasselbe nach dem Gesetze der arithm. Progression C, C + fC, C + 2fC, u. s. f. und wird nebst den aufgehäuften Zinsen am Ende des n^{ten} Jahres

$$\text{I.}\quad E = C + nfC = C(1+nf)$$

Der Ausdruck für das anfängliche Capital, wenn man Ertrag, Zinsfuß und Jahre kennt, ist demnach

$$\text{II.}\quad C = \frac{E}{1+nf};$$

ferner derjenige des Zinsfußes, aus C, E, n:

$$\text{III.}\quad f = \frac{1}{n}\left(\frac{E}{C} - 1\right)$$

und endlich der Anzahl der Jahre aus C E, f:

$$\text{IV.}\quad n = \frac{1}{f}\left(\frac{E}{C} - 1\right)$$

Wäre n Jahre lang, jährlich ein Capital C ausgezahlt, so würde der gegenwärtige Werth dieser ganzen Summe mit Anrechnung der einfachen Zinsen jeder Zahlung folgende Progression bilden, indem die erste Zahlung (n — 1) Jahre hindurch zinsentragend war u. s. f. bis auf die letzte, ohne Zinsen aus zuzahlende (nach 136. I):

$$s = C(1 + (n-1)f) + \ldots\ldots + C(1+2f) + C(1+f) + C$$

d. i. $\text{V.}\quad s = C(2 + (n-1)f).\frac{n}{2}$

B. Zusammengesetzte Zinsrechnung.

Wichtiger ist die Voraussetzung, daß die Zinsen jedes Jahrs, sofern sie mit dem Capital vereinigt bleiben, als eine Vermehrung desselben angesehen werden, wovon die Zinsen wiederum zu berechnen sind, so daß das Capital C in einem Jahr zu C + fC oder C(1 + f), im zweiten Jahre zu C(1 + f).

$(1+f) = C(1+f)^2$, im dritten zu $C(1+f)^2$. $(1+f) = C(1+f)^3$ und allgemein nach n Jahren zu

$$\text{I.} \quad E = C(1+f)^n$$

werde, woraus umgekehrt als Werth des anfänglichen Capitals

$$\text{II.} \quad C = \frac{E}{(1+f)^n}$$

ferner des Zinsfußes

$$\text{III.} \quad f = \sqrt[n]{\frac{E}{C}} - 1$$

und endlich der Anzahl der Jahre

$$\text{IV.} \quad n = \frac{\log. E - \log. C}{\log. (1+f)}$$

sich ergiebt. Wäre aber n Jahre hindurch das Capital C jährlich zahlbar, so wird die Summe aller einzelnen Zahlungen am Ende des n^{ten} Jahres folgende Factorenreihe bilden:

$$C(1+f)^{n-1} + C(1+f)^{n-2} \ldots + C(1+f)^2 + C(1+f) + C,$$

weil das vor $(n-1)$ Jahren zu zahlende Capital den gegenwärtigen Werth von $C(1+f)^{n-1}$ gewonnen haben muß, u. s. f. bis auf das gegenwärtig zahlbare C. Es ist aber die Summe dieser Reihe (nach 137. I):

$$\text{V.} \quad s = \frac{C((1+f)^n - 1)}{f}$$

140 Anwendungen. Die vorstehenden Formeln mögen durch einige numerische Beispiele, die mit Hülfe der Logarithmen zu berechnen sind, näher erläutert werden.

1) Ein Wald, der vor 12 Jahren zu 64340 Thaler angeschlagen worden, gewinnt durch Wachsthum jährlich im Durchschnitt $2\frac{1}{5}$ pro Cent, verliert dagegen aber durch regelmäßige Nutzung $1\frac{1}{4}$ p. C. Welches ist demnach sein gegenwärtiger Werth?

$$\text{I.} \quad E = 64340\left(1 + \frac{(2\frac{1}{5} - 1\frac{1}{4})}{100}\right)^{12} = 64340\left(\frac{209}{200}\right)^{12}.$$

2) Man bietet für ein Gut 85600 Thaler unter der Bedingung, daß diese Kaufsumme erst nach 8 Jahren zu bezahlen sey. Wie hoch ist, den Zinsfuß zu 5 p. C. gerechnet, dieses Gebot für den Augenblick anzuschlagen?

$$\text{II. } C = \frac{85600}{\left(1+\frac{5}{100}\right)^8} = \frac{85600}{\left(\frac{21}{20}\right)^8} = 85600\left(\frac{20}{21}\right)^8.$$

3) In einem Fabrikgeschäfte ist ein Capital von 23680 Thalern 16 Jahre hindurch ununterbrochen zinsentragend benutzt worden und in dieser Zeit zu dem Ertrage von 95376 Thalern gestiegen. Wie viele Procente hat es getragen?

$$\text{III. } f = \sqrt[16]{\frac{95476}{23680}} - 1.$$

4) Man hat in einer Stadt seit vielen Jahren ein ziemlich beständiges Zunehmen der Einwohnermenge beobachtet, indem unter 1000 Menschen jährlich im Durchschnitt 31 Todte und 43 Geborne sind. In wie viel Jahren würde hiernach die Einwohnerzahl sich verdoppelt haben?

$$\text{IV. } n = \frac{\log. 2 - \log. 1.}{\log.\left(1+\frac{43-31}{1000}\right)} = \frac{\log. 2}{\log.\left(\frac{1012}{1000}\right)}$$

5) Zu welcher Summe wird ein Tilgungsfond, in welchen von den Staatseinkünften jährlich 2 Millionen Thaler fließen, nach 60 Jahren angewachsen seyn, wenn dieses Geld zu $4\frac{1}{2}$ p. C. benutzt werden kann?

$$\text{V. } s = \frac{2000000\left(\left(\frac{109}{200}\right)^{60} - 1\right)}{\left(\frac{9}{2}\right)}$$

141. **Terminliche Zahlungen.** Eine andere interessante Anwendung der Factorenreihen giebt die Bestimmung der terminlichen Zahlungen E eines gewissen, gegenwärtig fälligen Capitals K, oder umgekehrt die Berechnung dieses Capitalwerthes, wenn die jährliche Zahlung (wie bei den Renten) gegeben ist. Auch die Zeit, in welcher K durch terminliche Zahlungen abgetragen seyn wird, läßt sich nach der allgemeinen Formel bestimmen, nicht aber der Zinsfuß, wenn E, K und n gegeben sind. Es ist nämlich nach N° II. der obigen Formeln (§. 139) der **jetzige Werth** eines, nach n Jahren fälligen Capitals E:

$$C = \frac{E}{(1+f)^n}.$$

Also wird der Gesammtbetrag aller, binnen n Jahren zu leistenden, jährlichen Zahlungen ausgedrückt durch

$$\frac{E}{1+f} + \frac{E}{(1+f)^2} + \frac{E}{(1+f)^3} + \frac{E}{(1+f)^4} \cdots + \frac{E}{(1+f)^n}$$

und wenn man den Factor der Reihe $\left(\frac{1}{1+f}\right) = g$ setzt:

$$Eg + Eg^2 + Eg^3 + Eg^4 + \ldots\ldots + Eg^n$$

oder zusammengezogen $K = \frac{Eg\,(g^n-1)}{g-1}$; und da g ein ächter Bruch ist, durch Aenderung der Zeichen im Zähler und Nenner:

$$\text{I. } K = \frac{Eg\,(1-g^n)}{1-g}$$

$$\text{II. } E = \frac{K\,(1-g)}{g\,(1-g^n)}$$

$$\text{III. } n = \frac{\log.\left(1 - \frac{K(1-g)}{Eg}\right)}{\log. g}$$

142. Anwendungen. Einige, den Gebrauch dieser Formeln erfordernde und mit Hülfe der Logarithmen zu berechnende, Aufgaben in bestimmten Zahlen sind folgende:

1) Mit welchem Capital kann man sich auf 20 Jahre eine Rente von 1200 Thalern erkaufen, den Zinsfuß zu 5 p. C. angenommen?

$$\text{I. } K = \frac{1200.\ \frac{100}{105}\left(1 - \left(\frac{100}{105}\right)^{20}\right)}{1 - \frac{100}{105}}$$

2) Wie groß ist die Rente, welche man sich mit einem Capitale von 18000 Thalern auf 18 Jahre erkaufen würde, den Zinsfuß zu 4½ p. C. gerechnet?

$$\text{II. } E = \frac{18000\left(1 - \left(\frac{200}{209}\right)\right)}{1 - \left(\frac{200}{209}\right)^{18}}$$

3) In wie vielen Jahren wird ein Capital von 30000 Thalern, welches 5 p. C. Zinsen trägt, die fortgesetzt zum Capital

geschlagen werden, mit jährlichen Zahlungen von 3000 Thalern abgetragen seyn?

$$\text{III. } n = \frac{\log.\left(1 - \frac{30000\left(1-\frac{100}{105}\right)}{3000.\frac{100}{105}}\right)}{\log.\frac{100}{105}}.$$

143. Interpolation der Differenzreihen.

Jedes beliebige Glied $\overset{k}{a}$ einer Differenzreihe

1	2	3	4		k		n
a	a	a	a	. . . .	a	. . . . .	a

oder a, a+d, a+2d, a+3d, .. a+(k−1)d .. (a+(n−1)d)

wird durch Addition der (k − 1) maligen Differenz zum Anfangsgliede bestimmt. Eben so geschieht die Einschaltung oder Interpolation von beliebigen k Zwischengliedern zwischen zwei succeſſive Glieder $\overset{m}{a}$ und $\overset{m+1}{a}$ oder a + (m − 1)d und a + m d, indem man die Differenz in (k+1) gleiche Theile zerlegt und durch k maliges Addiren der neuen kleinern Differenz $\delta = \frac{d}{k+1}$ jene k Glieder bildet. Denn die dadurch entstandene Reihe

$$\overset{m}{a},\ a+\delta,\ a+2\delta,\ a+3\delta,\ \ldots\ldots\ a+k\delta,\ \overset{m+1}{a}$$

ist eine arithmetiſche Progreſſion mit k eingeſchalteten Gliedern, wovon das letzte durch Addition der Differenz δ in das Endglied $\overset{m+1}{a} = a + (k+1)\,\delta = \overset{m}{a} + d$ übergeht.

144. Interpolation der Factorenreihen.

Das k^{te} Glied einer mit a anfangenden und dem Factor f fortschreitenden geometriſchen Progreſſion ist $= a f^{k-1}$. Sollen aber zwiſchen zwei Gliedern der Reihe $\overset{m}{a}$ und $\overset{m+1}{a}$ oder af^{m-1} und af^m allgemein k Zwiſchenglieder interpolirt werden, so muß man einen neuen Factor φ so zu beſtimmen ſuchen, daß durch (k+1) malige Multiplication des Gliedes af^{m-1} mit demſelben das Folgende af^m zum Vorſchein komme. Dieß geſchieht nun nach der Eigenſchaft der Factorenreihen durch eine Theilung der Exponentendifferenz 1 in k + 1 gleiche

Theile, wodurch $\varphi = f^{\frac{1}{k+1}} = \sqrt[k+1]{f}$ wird. Denn in der dadurch entstehenden Reihe

$$a,\ a\varphi^m,\ a\varphi^{2m},\ a\varphi^{3m},\ \ldots\ldots\ldots\ a\varphi^{km},\ a^{m+1}$$

folgt das Endglied aus dem letzten der k eingeschalteten Glieder durch Multiplication mit dem Factor φ, weil $a.\varphi^{k+1} = af^m = a^{m+1}$.

145. Figurirte Zahlen. Wenn in der allgemeinen Differenzreihe a, a+d, a+2d u. s. f. $a = 1$ und $d = 1$ gesetzt und die allmähligen Summen der daraus folgenden natürlichen Zahlenreihe 1, 2, 3, 4 .... genommen werden, so erhält man eine neue Reihe der sogenannten Trigonalzahlen, durch deren allmählige Summation wiederum die Reihe der Pyramidalzahlen entsteht. Auf diese Weise fortfahrend, kann man höhere Ordnungen von Zahlenreihen bilden, die sämmtlich unter dem Namen von figurirten Zahlen begriffen werden, weil die einzelnen Glieder einer jeden durch Figuren derselben Art sich versinnlichen lassen. Eine Uebersicht der ersten neun Reihen dieser figurirten Zahlen, welche bis zum 10ten Gliede derselben reicht und die Entstehung der einen aus der andern am deutlichsten erkennen läßt, folgt hier:

Glieder.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.
1 a	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2 a	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3 a	3	6	10	15	21	28	36	45	55
4 a	4	10	20	35	56	84	120	165	220
5 a	5	15	35	70	126	210	330	495	715
6 a	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002
7 a	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005
8 a	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440
9 a	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310
10 a	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620

Der allgemeine Ausdruck eines n^{ten} Gliedes aus der k^{ten} Reihe dieser figurirten Zahlen ist $a_k^n = \frac{n.n+1.n+2...n+(k-1)}{1.2.3.....k}$;

denn nach vorstehender Tafel hat man überhaupt $a_k^n = a_k^{n-1} + a_{k-1}^n$

und wenn jener Ausdruck hypothetisch angewendet wird:

$$a_k^{n-1} = \frac{n-1.n.n+1.n+2...n+k-2}{1.2.3.4.....k}$$

$$a_{k-1}^n = \frac{n.n+1.n+2.n+3...n+k-2}{1.2.3.4....k-1}$$

$$\text{also } a_k^{n-1} + a_{k+1}^n = \frac{(n.n+1.n+2...n+k-2)\,(n-1+k)}{1.2.3.....k.},$$

woraus die Richtigkeit der Voraussetzung, d. h. des obigen allgemeinen Ausdrucks folgt, weil derselbe mit diesem, aus dem Zusammenhange der figurirten Zahlen gefolgerten identisch ist.

146. Polygonalzahlen. Wird in der allgemeinen Differenzreihe $a = 1$ und $d = 1, 2, 3, 4...$ nach einander gesetzt, so entstehen dadurch die Reihen der sogenannten Polygonalzahlen, die man nach den verschiedenen Arten der Versinnlichung, durch Drei- Vier- Fünf-Ecke u. s. w. Trigonal- Tetragonal- Pentagonal-Zahlen u. s. f. genannt hat.

147. Höhere Differenzreihen. Durch die allmählige Summirung der arithmetischen Progression in ihrer allgemeinen Gestalt.

$$a \quad a+d \quad a+2d \quad a+3d \quad a+4d \ldots$$

erhält man eine neue Reihe, deren Glieder, als Differenzen betrachtet und mit einer Größe b verbunden, eine Differenzreihe vom zweiten Range erzeugen:

$$b+a \quad b+2a+d \quad b+3a+3d \quad b+4a+6d \ldots.$$

welche wiederum summirt und in allen Gliedern mit c verbunden werden kann, um eine Differenzreihe vom dritten Range zu bilden:

$$e+b+a \quad e+2b+3a+d \quad e+3b+6a+4d \ldots$$

Auf diesem Wege entstehen höhere Differenzreihen durch fortgesetzte Summirung, von denen man durch Subtraction zu den niedrigeren zurückkehren kann. In diesen höhern Differenzreihen erscheinen nun die oben (§. 145) abgeleiteten figurirten Zahlen, die man für eine gegebene Reihe k und für eine in derselben gegebenen Stelle n allgemein $= \frac{n.n+1.n+2\ldots.n+k-1}{1.2\ \ 3\ldots\ldots k}$ setzen darf. Die $(n-1)^{te}$ Zahl der zweiten Reihe ist also $\frac{n-1.n}{1.2}$, die $(n-2)^{te}$ der dritten $= \frac{n-2.n-1.n}{1.2.\ \ 3}$, u. s. f. Daraus läßt sich nun leicht die nachstehende Ableitung der höheren Differenzreihen aus der ursprünglichen oder ersten, und namentlich des Terminus generalis (des n^{ten} Gliedes) jeder Reihe einsehen:

Glieder	1	2	3	4	.	n
I. Diff. Reihe	a	a+d	a+2d	a+3d	...	a+(n−1)d
Summen	a	2a+d	3a+3d	4a+6d	...	$na+\frac{n-1.n}{1.2}d$

Glieder	1.	2.	3.	4	.	n
II. D. R.	b	b+a	b+2a+d	b+3a+3d	...	$b+(n-1)a+\frac{n-2.n-1}{1.2}d$
Summen	b	2b+a	3b+3a+d	4b+6a+4d	...	$nb+\frac{n-1.n}{1.2}a+\frac{n-2.n-1.n}{1.2.3}d$

Glieder	1	2	3	4	.	n
III. D. R.	c	c+b	c+2b+a	c+3b+3a+d	...	$c+(n-1)b+\frac{n-2.n-1}{1.2}a+\frac{n-3.n-2.n-1}{1.2.3}d$
Summen	c	2c+b	3c+3b+a	4c+6b+4a+d	...	$nc+\frac{n-1.n}{1.2}b+\frac{n-2.n-1.n}{1.2.3}a+\frac{n-3.n-2.n-1.n}{1.2.3.4}d$
u. s. w.						

Sehr einfach ist nach diesem Schema die Ableitung der höheren Differenzreihen, wenn für die allgemeinen Zeichen specielle numerische Werthe gegeben sind, z. B. a=2, d=3, b=4, c=5, ... gesetzt wird; denn hier erhält man:

I. Diff. Reihe	=	2	5	8	11	14	17	20 ..
Summen	=	2	7	15	26	40	57	77 ..
II. Diff. R.	=	4	6	11	19	30	44	61	81 ..
Summen	=	4	10	21	40	70	114	175	256 ..
III. D. R.	=	5	9	15	26	45	75	119	180	261 ..

u. s. w.

Sollte umgekehrt eine höhere Differenzreihe gegeben, ihr Rang aber noch unbekannt seyn, so findet man denselben vermöge Subtraction aller benachbarten Glieder, wobei man endlich auf gleichen Unterschied kommt und aus der Anzahl der abgeleiteten Reihen den Rang der gegebenen erkennt. So ist z. B. die Reihe 5, 9, 15, 26, 45, 75, ... vom dritten Range, weil die Subtraction ihrer benachbarten Glieder zwei andere Differenzreihen, dann aber gleiche Differenzen liefert, wie folgt:

5	9	15	26	45	75	119	180	261
	4	6	11	19	30	44	61	81
		2	5	8	11	14	17	20
			3	3	3	3	3	3

148. Anwendungen. Es giebt außer den gewöhnlichen (arithmetischen und geometrischen) Progressionen, deren Glieder durch Addition einer Differenz oder Multiplication eines Factors sich aus einander erzeugen, eine Menge anderer, die nach bestimmten Gesetzen fortschreiten und bei näherer Prüfung als höhere Differenzreihen von bestimmtem Range erkannt werden. Für solche wird man nach der obigen Ableitungstafel dann auch allgemeine Summenausdrücke aufstellen können, aus denen durch Substitution specieller Zahlenwerthe die Summe der Reihen bis zu einem beliebigen (n^{ten}) Gliede ohne Weiteres gefunden werden, wie folgende Aufgaben dieß näher erläutern mögen:

1) Die Summe der Zahlenreihe 1, 4, 9, 16, 25 ... n^2, aus den Quadraten der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 ... n, bestehend, soll in einer allgemeinen Formel gegeben werden.

Da die Reihe nach zweimaligem Subtrahiren eine andere aus gleichen Differenzen giebt, so ist sie eine Differenzreihe vom zweiten Range, worin $b=1$, $b+a=4$ also $a=3$, und $b+2a+d=9$ also $d=2$. Durch Substitution dieser Zahlenwerthe wird der allgemeine Ausdruck der Summe vom 1ten bis zum n^{ten} Gliede aus der obigen Tafel:

$$s = n + 3\,\frac{n.n-1}{1.2} + 2\,\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}$$

2) Man soll den summatorischen Ausdruck für die Reihe der Quadrate der ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, ... angeben.

Auch diese Reihe ist, da nach zweimaligem Subtrahiren die gleichen Unterschiede 8 giebt, eine Diff. Reihe vom 2ten Range und $b=1$, $a=8$, $d=8$; also

$$s = n + 8.\,\frac{n.n-1}{1.2} + 8\,\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}$$

3) Es wird nach dem Inhalt eines länglich-viereckig gelegten Kugelhaufens gefragt, der aus n Schichten besteht und in der obern b Kugeln in einer Reihe liegen hat.

Hier sind die einzelnen Kugelschichten $b, 2(b+1), 3(b+2), 4(b+3)$ . ., weil jede obere Kugel über vier unterliegenden ruhet. Man erkennt aber in der Reihe $b, 2b+2, 3b+6, 4b+12$ . . . eine Differenzreihe vom 2ten Range, für welche $a=b+2$, und $d=2$ ist. Also findet man hier

$$s = b.n + (b+2)\,\frac{n.n-1}{1.2} + 2\,\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}$$

4) Man verlangt die allgemeine Summe der Zahlenreihe $1, 8, 27, 64, 125, \ldots n^3$, aus den Cuben der natürlichen Zahlen bestehend.

Diese Reihe wird durch dreimaliges Abziehen, wodurch man auf die Differenzen 6 kommt, als eine Diff. Reihe vom 3ten Range erkannt, in welcher $c=1$, $b=7$, $a=12$, $d=6$ ist. Folglich hat man hier

$$s = n + 7.\,\frac{n.n-1}{1.2} + 12.\,\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} + 6.\,\frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}$$

Anmerkung. Die in diesen Beispielen gefundenen Ausdrücke lassen sich allerdings noch umgestalten und in kürzere Formeln zusammenziehen; indessen gewähren diese für die wirkliche Berechnung eben keine größere Bequemlichkeit und büßen den Vorzug der Regelmäßigkeit für Auge und Gedächtniß ein.

Drittes Buch.

Die allgemeine Arithmetik.

149. Function. Sofern ein aus mehreren Größen auf irgend eine Weiſe zuſammengeſetzter arithmetiſcher Ausdruck als abhängig von dem Werthe einer dieſer Größen betrachtet wird, pflegt man ihn eine Function derſelben zu nennen. So iſt das Product eine Function vom Multiplicandus oder Multiplicator, die Potenz vom Grundfactor oder Exponenten, die Progreſſion von der Differenz oder dem Factor u. ſ. w. Ausdrücke, wie $a+bx$, $\frac{a+x}{b+x^2}$, $\sqrt{ax}$, $\log.\left(\frac{x}{a}\right)$ können Functionen von x oder auch von a genannt und ganz allgemein durch die Bezeichnungen $F(x)$, $f(x)$, $\varphi(x)$ ... $F(a)$, $f(a)$, $\varphi(a)$ angedeutet werden.

150. Reihen. Daß ſolche Functionen nicht ſelten fähig ſind, in einer aus abgeſonderten Gliedern beſtehenden Zahlenreihe entwickelt zu werden, beweiſen die Diviſion und Wurzelausziehung in Ausdrücken, wie $\frac{2}{3}=0,6666\ldots$ oder $\sqrt{13}=3,60555\ldots$ Bei dekadiſchen Rechnungen wird die Entwickelung des Werthes ſolcher Ausdrücke in Reihen gegeben, deren Glieder (d. h. Ziffern) dem Range nach verſchieden ſind und ſich ſtets auf Potenzen der Grundzahl 10 beziehen, die der vollſtändigen Erklärung wegen auch wohl beigefügt werden (§. 78), ſo daß jede dekadiſche Zahl einer Function von 10 iſt. Allgemeiner wird man demnach annehmen dürfen, daß Functionen der Größe x (eben ſo wie die Functionen der Zahl 10) in einer, nach Potenzen derſelben fortſchreitenden Reihe ſich entwickeln laſſen, deren Glieder dem Range nach entweder ſteigen oder fallen. Die Größe x kann man hier die Hauptgröße und alle andere, als Factoren ihrer Potenzen auftretenden Größen Coefficienten der Reihe nennen, deren allgemeinſte Form dieſe iſt:

$$ax^{\alpha}+bx^{\beta}+cx^{\gamma}+dx^{\delta}+ex^{\varepsilon}+\ldots+mx^{\mu}+\text{etc.}$$

151. Analysis. Die Anwendung der Grund- und Rangoperationen auf solche Reihen, um aus ihnen andere Reihen als Resultate abzuleiten, erzeugt die höhere oder allgemeine Arithmetik, gewöhnlicher mit dem Namen Analysis bezeichnet. Die Rechnung wird hier umfassender, weitläufiger und in der Bestimmung von Größen, wie in der Schlußart, wodurch der Beweis für ein Gesetz der Reihe gegeben werden soll, ungleich schwieriger. Jene Bestimmung unbekannter, aus gegebenen Größen geschieht vorzüglich durch Auflösung einfacher Gleichungen, diese Beweisführung aber durch die sogenannte Induction, indem man ein, dem Anscheine nach gültiges, Gesetz vorläufig annimmt und dessen Allgemeingültigkeit dadurch zu bestätigen sucht, daß man, in der eigenthümlichen Bildung des Resultats noch einen Schritt weiter gehend, es auf's Neue wieder hervortreten sieht, wie davon der Beweis des allg. Ausdrucks für figurirte Zahlen (§. 145) ein Beispiel giebt.

152. Analytische Operationen. Das weitläufige Geschäft der Analysis, welcher alle Untersuchungen über Reihen angehören, zerfällt zunächst in: 1) Verknüpfung der Reihen durch Anwendung der Grundoperationen; 2) Entwickelung geschlossener Functionen in Reihen durch Bestimmung der Coefficienten ihrer Glieder; und 3) Bestimmung der Hauptgröße, wenn der Werth der Reihe wie ihrer Coefficienten gegeben ist. Daraus ergeben sich als die wesentlichsten analytischen Operationen die Addition und Subtraction, Multiplication und Division von Reihen, die Entwickelung der Functionen $(a+x)^n$, $(a+b)^x$, und log. x, worin die Hauptgröße als Theil eines Binomiums, als Exponent einer Potenz und als Zahl eines Logarithmus erscheint, so wie die Auflösung der Gleichungen. Diese verschiedenen Untersuchungen können nicht zweckmäßiger eingeleitet werden, als durch die Darstellung der allgemeinen Gesetze und Regeln einer, bei ihnen sorgfältig zu beobachtenden Anordnung der einzelnen Glieder und ihrer Verbindungen, welche unter dem Namen der combinatorischen Operationen oder Combinationslehre hier zunächst folgt.

Erſtes Kapitel.

Die combinatoriſchen Operationen.

153. **Combinationslehre.** Es kann bei der Betrachtung mehrerer Dinge nicht ſowohl nach der *Größe* oder *Beſchaffenheit* derſelben, als vielmehr nach ihren, gewiſſen Forderungen entſprechenden, *Zuſammenſtellungen* gefragt werden, und die Beantwortung dieſer Frage bildet den Gegenſtand der *Combinationslehre*. Da dieſe die Dinge, aus denen Zuſammenſtellungen gefordert werden, als ein Mannigfaltiges einzelner Beſtandtheile lediglich in Beziehung auf die *Folge* derſelben zu betrachten hat, ſo bieten ſich *Buchſtaben* oder *Zahlen* auch hier als die paßlichſten Zeichen dar. Ihr Gebrauch für die Combinationslehre als *Elemente*, aus denen durch Zuſammenſtellung *Formen oder Complexionen* gebildet werden ſollen — wie abc, acd, adc .... 1234, 1324, 3142 ... aus den Elementen a, b, c, d oder 1, 2, 3, 4 — iſt alſo durchaus verſchieden von der gewöhnlichen arithmetiſchen Anwendung der Zahlen und Buchſtaben, wo ſie als *Aliquotes* ſich auf eine beſtimmte *Einheit* beziehen, während ſie hier nur als Zeichen zur *Unterſcheidung verſchiedener Dinge* gelten.

154. **Anordnung der Formen.** Eine Ueberſicht der, aus gegebenen Elementen gebildeten, Formen läßt ſich nur durch eine *Anordnung* derſelben nach beſtimmten Grundſätzen gewinnen, und hiezu ſtehen zwei verſchiedene Wege offen. Man kann ſie nämlich nach der *Uebereinſtimmung der gleichſtelligen Elemente*, wie die Wörter eines Lexicons oder *lexicographiſch* auf einander folgen laſſen, ohne dabei Rückſicht auf ihre Anzahl zu nehmen, wie in der Formenreihe:

1, 12, 123, 13, 132, 2, 21, 213, 23, 231, 3, 31, 312, 32, 321.

geſchehen iſt; oder man ordnet ſie außerdem nach der *Menge der Elemente* in verſchiedenen *Claſſen* und erhält dadurch die *arithmoraphiſche Anordnung*:

1, 2, 3; 12, 13, 21, 23, 31, 32; 123, 132, 213, 231, 312, 321;

ede Classe solcher Formen kann man nach den Anfangsele-
enten wieder in einzelne Ordnungen zerfällen; so enthält die
itte Classe der obigen Formen

I. 123, 132. II. 213, 231. III. 312, 321.

155. Bildungsgesetz. Aus diesen Grundsätzen der
ordnung ergiebt sich sehr einfach für die vollständige Bildung
ler Formen aus gegebenen Elementen das allgemeine
esetz: Aus der niedrigsten Form erzeugen sich dadurch
lmählig alle höheren, daß man stets die späteste Stelle,
elche eine Erhöhung zuläßt, um so wenig als
öglich erhöhet, für die übrigen Stellen aber
ie natürliche Folge der Elemente beibehält. So
tstehen als Formen der vierten Classe aus den Elementen
2, 3, 4 durch Versetzung allmählig:

I. 1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432;

II. 2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431; u. s. w.

156. Combinatorische Operationen. Bei der
ildung von Complexionen aus gegebenen Elementen können
n entweder diese sämmtlich, in allen verschiedenen
olgen zusammengestellt, oder es kann eine bestimmte
enge von Elementen jedesmal herausgehoben werden,
n Formen zu bilden, die wiederum entweder alle durchaus
erschieden oder auch nur verschieden geordnete
lemente enthalten. Diese drei Fälle erzeugen eben so viele
mbinatorische Operationen: das Permutiren, Combi-
iren und Variiren, als deren Andeutungen, die Buch-
ben P, C, V gelten. Eine der beiden letzten Zeichen über-
setzte Zahl zeigt die Menge der zusammenzufassenden Ele-
ente oder die Classe der zu bildenden Form an. Beispiele
von sind:

1) $P_3(1, 2, 3) = 123, 132 \mid 213, 231 \mid 312, 321.$

2) $C_2(1....5) = 123, 124, 125, 134, 135, 145 \mid 234, 235, 245 \mid 345.$

3) $V_2(1..4) = 12, 13, 14 \mid 21, 23, 24 \mid 31, 32, 34 \mid 41, 42, 43.$

an darf hiernach auch die Permutation als Veränderung in
ezug auf die Ordnung der Elemente, Combination als Ver-
nderung in Bezug auf die Elemente selbst und Variation als
eränderung in Beziehung auf beides zugleich betrachten.

157. **Wiederholbarkeit der Elemente.** Findet man es angemessen, durch dasselbe Zeichen das Daseyn mehrerer Dinge derselben Art anzudeuten oder ein Element zu **wiederholen**, so ändern sich die allgemeinen Gesetze für Anordnung und Bildung der Formen durchaus nicht. Es wird aber der Complexionen dann **weniger** geben, als wenn sämmtliche Elemente verschieden sind. Beispiele dieser Art geben:

1) $P(1,1,2) = 112, 121, 211.$

2) $\overset{3}{C}(1,1,2,2,3) = 112, 113, 123, 223.$

3) $\overset{2}{V}(1,1,2,3) = 11, 12, 13, 21, 23, 31, 32.$

Dürfen alle Elemente **gleich viele Mal** wiederholt werden, so kann man dieß, wie bei den Potenzen, durch **Exponenten** angeben, und ist **unbedingte Wiederholung** gestattet, durch die unbestimmte Bezeichnung n des Exponenten. Beispiele sind: $\overset{6}{C}(1,2,3)^5$, $\overset{3}{V}(0,1,2)^2$, $\overset{4}{C}(1..7)^n$.

158. **Permutation.** Die Bildung sämmtlicher Permutationsformen geschieht nach der allgemeinen Vorschrift (§. 155.) sehr einfach mit Rücksicht auf die einzelnen **Ordnungen** wie in folgenden Beispielen:

1) $P(1,2,3,4) =$

I.		II.		III.		IV.
1234	+	2134	+	3124	+	4123
1243		2143		3142		4132
1324		2314		3214		4213
1342		2341		3241		4231
1423		2413		3412		4312
1432		2431		3421		4321

2) $P(1,2,2,3) =$

I.		II.			III.
1223	+	2123	2231	+	3122
1232		2132	2312		3212
1322		2213	2321		3221

Auch kann man, von einem Element anfangend, und durch **Classen** fortschreitend die Permutationsformen **allmählig** bilden, indem man durch **Anhängen** der einzelnen Elemente die Formen der zweiten, dritten Classe u. s. w. erzeugt, wie in folgendem Schema angedeutet ist:

$$P(a,b,c,d) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \left|\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ & & d & c \\ & c & b & d \\ & & d & c \\ & d & b & c \\ & & c & b \end{array}\right| \end{array} + \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \left|\begin{array}{c|ccc} b & a & c & d \\ . & & d & c \\ . & c & a & d \\ . & & d & a \\ . & d & a & c \\ . & & c & a \end{array}\right| \end{array} + \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \left|\begin{array}{c|c|c|c} c & a & b & d \\ . & . & d & b \\ . & b & a & d \\ . & . & d & a \\ . & d & a & b \\ . & . & b & a \end{array}\right| \end{array} + \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \left|\begin{array}{c|ccc} d & a & b & c \\ . & . & c & b \\ . & b & a & c \\ . & . & c & a \\ . & c & a & b \\ . & . & b & a \end{array}\right| \end{array}$$

159. **Combination.** Da unter Combiniren das Hervorheben einer bestimmten Anzahl stets **verschiedener Elemente** verstanden wird, so gilt hier bei Anwendung der allgemeinen Bildungsregel der Zusatz: **daß nie auf ein höheres ein niedrigeres Element folge**, weil nur dadurch die Erzeugung identischer Combinationsformen vermieden wird. Hiernach können die Formen **unmittelbar** in einzelnen **Ordnungen**, wie im Folgenden, dargestellt werden:

$$1)\ \overset{4}{C}(1\ldots6) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{I.} & \end{array} \\ \left|\begin{array}{cc} 1234 & 1256 \\ 1235 & 1345 \\ 1236 & 1346 \\ 1245 & 1356 \\ 1246 & 1456 \end{array}\right| \end{array} + \begin{array}{c} \text{II.} \\ \left|\begin{array}{c} 2345 \\ 2346 \\ 2356 \\ 2456 \end{array}\right| \end{array} + \begin{array}{c} \text{III.} \\ \left|\begin{array}{c} 3456 \end{array}\right| \end{array}$$

$$2)\ \overset{3}{C}(1\ldots4)^n = \begin{array}{c} \text{I.} \\ \left|\begin{array}{c} 111 \\ 112 \\ 1\ 3 \\ 114 \\ 122 \\ \text{etc.} \end{array}\right| \end{array} + \begin{array}{c} \text{II.} \\ \left|\begin{array}{c} 222 \\ 223 \\ 224 \\ 233 \\ 234 \\ 244 \end{array}\right| \end{array} + \begin{array}{c} \text{III.} \\ \left|\begin{array}{c} 333 \\ 334 \\ 344 \end{array}\right| \end{array} + \begin{array}{c} \text{IV.} \\ \left|\begin{array}{c} 444 \end{array}\right| \end{array}$$

Aber auch durch **allmähliges Fortschreiten** von der niedrigsten **Classe** der **einzelnen** Elemente (durch Anhängen der späteren) kann man die Formen jeder höheren ableiten, wie in folgendem Schema angedeutet ist:

$$\overset{3}{C}(a,\ldots.f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \left|\begin{array}{ccc} a & b & c \\ . & & d \\ . & & e \\ . & & f \\ . & c & d \\ & \text{etc.} & \end{array}\right| \end{array} + \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \left|\begin{array}{c|c|c} b & c & d \\ . & . & e \\ . & . & f \\ . & d & e \\ . & . & f \\ . & e & f \end{array}\right| \end{array} + \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \left|\begin{array}{c|c|c} c & d & e \\ . & & f \\ . & e & f \end{array}\right| \end{array} + \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \left|\begin{array}{ccc} d & e & f \end{array}\right| \end{array}$$

$$\overset{3}{C}(a\ldots d)^n = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \left|\begin{array}{ccc} a & a & a \\ . & & b \\ . & & c \\ . & & d \\ . & b & b \\ & \text{etc.} & \end{array}\right| \end{array} + \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \left|\begin{array}{ccc} b & b & b \\ . & . & c \\ . & . & d \\ . & c & c \\ . & . & d \\ . & d & d \end{array}\right| \end{array} + \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \left|\begin{array}{ccc} c & c & c \\ . & . & d \\ . & d & d \end{array}\right| \end{array} + \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \left|\begin{array}{ccc} d & d & d \end{array}\right| \end{array}$$

160. **Variation.** Die Bildung solcher Complexionen, worin eine Anzahl von Elementen in allen möglichen Folgen zusammengestellt werden soll, wird sich offenbar durch die beiden vorstehenden Operationen, ein vorgängiges Combiniren und an den erhaltenen Combinationsformen dann vorgenommenes Permutiren am einfachsten ausführen lassen, obgleich das Variiren auch unmittelbar, wie in folgendem Beispiele geschehen kann:

$$\overset{3}{V}(1..4) = \begin{array}{c} \text{I.} \\ \left|\begin{array}{c} 123 \\ 124 \\ 132 \\ 134 \\ 142 \\ 143 \end{array}\right| \end{array} + \begin{array}{c} \text{II.} \\ \left|\begin{array}{c} 213 \\ 214 \\ 231 \\ 234 \\ 241 \\ 243 \end{array}\right| \end{array} + \begin{array}{c} \text{III.} \\ \left|\begin{array}{c} 312 \\ 314 \\ 321 \\ 324 \\ 341 \\ 342 \end{array}\right| \end{array} + \begin{array}{c} \text{IV.} \\ \left|\begin{array}{c} 412 \\ 413 \\ 421 \\ 423 \\ 431 \\ 432 \end{array}\right| \end{array}$$

Durch Combination würde man die Formen 123, 124, 134, 234 und durch deren Permutation die nämlichen Variationsformen, jedoch in folgender Anordnung erhalten haben:

$$\overset{3}{V}(1..4) = \left|\begin{array}{c} 123 \\ 132 \\ 213 \\ 231 \\ 312 \\ 321 \end{array}\right| + \left|\begin{array}{c} 124 \\ 142 \\ 244 \\ 241 \\ 412 \\ 421 \end{array}\right| + \left|\begin{array}{c} 134 \\ 143 \\ 314 \\ 341 \\ 413 \\ 431 \end{array}\right| + \left|\begin{array}{c} 234 \\ 243 \\ 324 \\ 342 \\ 423 \\ 432 \end{array}\right|$$

Die successive Bildung der Variationsformen durch Fortschreiten von einer Classe zur andern geschieht dadurch, daß man ein Element nach dem andern derjenigen Form, worin es noch nicht enthalten ist, anhängt, wie in folgender Darstellung:

$$V^{3}(a..d) = \begin{vmatrix} 1&2&3 \\ a&b&c \\ .&.&d \\ .&c&b \\ .&.&d \\ .&d&b \\ .&.&c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1&2&3 \\ b&a&c \\ .&.&d \\ .&c&a \\ .&.&d \\ .&d&a \\ .&.&c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1&2&3 \\ c&a&b \\ .&.&d \\ .&b&a \\ .&.&d \\ .&d&a \\ .&.&c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1&2&3 \\ d&a&b \\ .&.&c \\ .&b&a \\ .&.&c \\ .&c&a \\ .&.&b \end{vmatrix}$$

Sollte aber unbedingte Wiederholbarkeit aller Elemente gestattet seyn, so dürfen jeder vorhandenen Form alle Elemente ohne Ausnahme angehängt werden:

$$V^{3}(a..d)^{n} = \begin{vmatrix} 1&2&3 \\ a&a&a \\ .&.&b \\ .&.&c \\ .&.&d \\ .&b&a \\ \text{etc.} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1&2&3 \\ b&a&a \\ .&.&b \\ .&.&c \\ .&.&d \\ .&b&a \\ \text{etc.} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1&2&3 \\ c&a&a \\ .&.&b \\ .&.&c \\ .&.&d \\ .&b&a \\ \text{etc.} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1&2&3 \\ d&a&a \\ .&.&b \\ .&.&c \\ .&.&d \\ .&b&a \\ \text{etc.} \end{vmatrix}$$

161. Anzahl der Permutationsformen. Aus dem successiven Bildungsgange der Permutationsformen erkennt man, daß ihre Anzahl für ein Element (a) = 1, für zwei (a, b) = 1. 2, für drei (a, b, c) = 1. 2. 3 oder 6, für vier (a, b, c, d) = 1. 2. 3. 4 oder 24 seyn müsse. Nehmen wir demnach an, daß die Anzahl der Permutationsformen aus n Elementen, durch p^{n} angedeutet, = 1. 2. 3. 4 ... n sey, und finden durch Zuziehung eines neuen Elements (n+1), daß alsdann die Menge derselben auf 1. 2. 3. 4 ... (n+1) anwachse, so ist die Richtigkeit jener Annahme erwiesen. Jede aus n Elementen bestehende Form bietet nun aber außer den 2 Stellen am Anfang und Ende noch (n—1) andere zum Einschieben eines neuen Elements dar, so daß aus ihr im Ganzen 2+n —1 = n+1 neue entstehen. Also muß die Anzahl p^{n} aller aus n Elementen bestehenden P. Formen mit dem Facror (n+1) multiplicirt werden; um p^{n+1} zu ergeben und es wird dadurch die Allgemeinheit des Satzes bestätigt: daß man nur, um die Anzahl der P. Formen gegebener Elemente zu erfahren, das Product aus ihrer natürlichen Zahlenreihe zu bilden habe.

Sollten aber einige Elemente wiederholt vorkommen, so wird die Anzahl der P. Formen geringer ausfallen. Denkt

man dieſe ſämmtlich ſchon gebildet und dann die gleichen Elemente in verſchiedene verwandelt, ſo entſtehen aus jeder Form in Beziehung auf q mal wiederholtes Element $\overset{q}{p}=1.2.3...q$, in Beziehung auf ein anderes r mal wiederholtes $\overset{r}{p}=1.2.3....r$ neue Formen. Betrachtet man alſo umgekehrt ſämmtliche n Elemente, mit Einſchluß der gleichen, als verſchieden, ſo iſt die Anzahl $\overset{n}{p}$ um das $\overset{q}{p}$ und $\overset{r}{p}$ fache zu groß, folglich die wirkliche Anzahl

$$\left(\frac{n}{q.r}\right)_{p=\frac{p}{p.\,p}}=\frac{1.2.3.4....n}{1.2.3...q.1.2.3.r}.$$

162. Anzahl der Variationsformen. Aus dem allmähligen Fortſchritte der Variation von einer Claſſe zur andern ergiebt ſich, wenn n verſchiedene Elemente vorhanden ſind, als Anzahl der Variationsformen für die erſte Claſſe $\overset{1}{v}=n$: für die zweite, weil jeder vorhandenen Form nach der Reihe alle (n—1) Elemente, die nicht in ihr vorkommen, angehängt werden ſollen, $\overset{2}{v}=n.n-1$; für die dritte, weil die (n—2) übrigen Elemente jeder einzelnen Complexion wiederum anzuhängen ſind, $\overset{3}{v}=n.n-1.n-2$, alſo allgemein für die k^{te} Claſſe, da jede Form der $(k-1)^{ten}$ mit den noch übrigen n—(k—1) Elementen der Reihe nach zu verbinden iſt, um die V. Formen derſelben zu bilden $\overset{k}{v}=n.n-1.n-2....n-(k-1)$ oder $=n.n-1.n-2.....n-k+1$.

Sollen die Elemente hingegen unbedingt wiederholt werden, ſo iſt zwar auch $\overset{1}{v}=n$; aber, weil jeder Form alle Elemente angehängt werden dürfen, $\overset{2}{v}=n.n=n^2$; $\overset{3}{v}=n^2.n=n^3$; allgemein $\overset{k}{v}=n^k$.

163. Anzahl der Combinationsformen. Da aus n Elementen ſich allgemein $\overset{k}{v}=n.n-1.n-2..n-k+1$

Variationsformen der k^{ten} Classe bilden lassen und eben diese Formen durch die 1. 2. 3. 4 . . . k malige Permutation der Combinationsformen zu k aus n Elementen entstanden seyn würden, so findet man als Anzahl dieser letztern;

$$\overset{k}{c} = \binom{v}{k}_{p} = \frac{n.n-1.n-2 \ldots n-k+1}{1.2.3 \ldots . k}.$$

Ist aber unbedingte Wiederholbarkeit der Elemente für die Combinationen gestattet, so erhält man nicht wie es scheint, $\frac{n^k}{1.2.3..k}$, sondern $\frac{n.\,n+1.\,n+2 \ldots . n+k-1}{1.\quad 2.\quad 3. \ldots . k}$ verschiedene Combinationsformen. Denn unter den Variationsformen der zweiten Classe kommen Formen aus gleichen Elementen wie 11, 22, 33 . . . nur einmal, hingegen die andern wie 12, 13, 23 sämmtlich zweimal vor: also muß die Menge der Elemente (oder Formen der ersten Classe) nicht n mal, sondern noch einmal mehr genommen werden, um durch 1. 2 dividirt, die richtige Anzahl der C. Formen zu geben, nämlich $\overset{2}{c} = \frac{n.\,n+1}{1.\,2}$. Eben so erscheinen unter den V. Formen der 3ten Classe 111, 222 . . , nur einmal; 112, 113, 223 . . . dreimal und Formen, wie 123, sechsmal permutirt: man denke sich also die n. n+1 (zum Theil doppelten) V. Formen der 2ten Classe nicht nur mit allen n Elementen verbunden, sondern außerdem noch jeder einzelnen Form jedes in ihr vorkommende Element zweimal angehängt, so erscheint jede Combinationsform sechsfach und man erhält also $\overset{3}{c} = \frac{n.\,n+1.\,n+2}{1.\quad 2.\quad 3}$. Auf dieselbe Weise läßt sich die Rechtfertigung der allgemeinen Formel weiter verfolgen.

164. Bedingte Combination. Es können Fälle eintreten, in denen nicht alle Combinationsformen, sondern nur solche, die einer gewissen Bedingung genügen, gültig bleiben. Solcher Bedingungen lassen sich zwar mancherlei denken, z. B. daß die Elemente in den Formen mit gleicher Differenz oder nach demselben Verhältniß fortschreiten, wie in 1357, 2468 oder 124, 248; die brauchbarste Bedingung ist aber die, daß die Elemente, als Zahlen betrachtet,

in allen Formen dieselbe Summe geben. — Um nun nach einer bestimmten Regel Comb. Formen zu gegebenen Summen zu bilden, darf man nur alle Stellen bis zur vorletzten mit den niedrigsten, die letzten aber mit den Ergänzungs-Elementen ausfüllen und bei'm Fortschreiten die früheren Stellen allmählig um eben so viel erhöhen, als man die letzten erniedrigt, ohne indessen je ein niedrigeres auf ein höheres Element folgen zu lassen. Beispiele solcher Combinationen, wofür die allgemeine Andeutung $^{k}C(1..n)$ gilt, sind folgende:

1) $^{3}C(1...7) = 127, 136, 145, 235.$

2) $^{4}C(1...8) = 1238, 1247, 1256, 1346, 2345.$

3) $^{4}C(0...5)^{n} = 0005, 0014, 0023, 0113, 0122, 1112,$

4) $^{5}C(3....)^{n} = 33338, 33347, 33356, 33446, 33455, 34445, 44444.$

Man erkennt leicht, daß in zwei Fällen diese Art von Combination unmöglich wird; nämlich 1) wenn die höchste Form die Summe noch nicht erreicht, oder 2) wenn die niedrigste Form dieselbe schon übersteigt, wie es in $^{3}C(123)$ oder $^{3}C(4...)$ der Fall ist.

165. Bedingte Variation. Auch bei'm Variiren kann die Bedingung gemacht werden, daß die Summe der Elemente in allen Formen dieselbe sey, und für eine solche Variation zu bestimmten Summen gelten die nämlichen Regeln, wie oben, nur daß hier, wo jede andere Folge der Elemente eine andere Form erzeugt, auch niedrigere nach höheren Elementen gesetzt, oder die vorläufig gebildeten Combinationsformen noch permutirt werden dürfen. Folgende Beispiele mögen dieses verdeutlichen:

1) $^{2}V(1..8) = 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81.$

2) $^{3}V(1...) = 124, 142, 214, 241, 412, 421.$

3) $^{4}_{6}V\,(1\ldots.)^n = 1113, 1122, 1212, 1221, 2112, 2121, 2211, 3111.$

4) $^{3}_{4}V\,(0..3)^n = 013, 022, 031, 103, 112, 121, 130, 202, 211, 220, 301, 310.$

Auch für die Variation zu bestimmten Summen treten zwei Fälle des Widerspruchs ein, wenn die höchste Form in wenig oder die niedrigste zu viel giebt, wie z. B. in $^{2}_{9}V\,(1..4)$ oder $^{2}_{9}V\,(5...)$.

166. Combinatorische Formeln. Sollen die Darstellungen der einzelnen Complexionen der Combination oder Variation nicht wirklich ausgeführt, sondern nur angedeutet werden, und zwar in Beziehung auf die einfachen Operationen des Combinirens und Permutirens, so kann dieses für eine gegebene Classe nach den, durch die Anfangselemente ihrer Formen bestimmten, Ordnungen in folgenden allgemeinen Ausdrücken geschehen.

I. $^{k}C\,(1...) = 1\,^{k-1}C\,(2..) + 2\,^{k-1}C\,(3...) + 3\,^{k-1}C\,(4..) + \text{etc.}$

II. $^{k}C\,(1..)^n = 1\,^{k-1}C\,(1..)^n + 2\,^{k-1}C\,(2..)^n + 3\,^{k-1}C\,(3..)^n + \text{etc.}$

III. $^{k}V\,(1..) = 1\,^{k-1}pC\,(2..) + 2\,^{k-1}pC\,(3..) + 3\,^{k-1}pC\,(4..) + \text{etc.}$

IV. $^{k}V\,(1..)^n = 1\,^{k-1}pC\,(1..)^n + 2\,^{k-1}pC\,(1..)^n + 3\,^{k-1}pC\,(1..)^n + \text{etc.}$

Die Entwickelung sämmtlicher Classen von Formen, deren Inbegriff durch C oder V ohne bestimmten Classenindex bezeichnet wird, ist in folgenden Formeln angedeutet:

V. $C\,(1...) = {}^{1}C\,(1...) + {}^{2}C\,(1...) + {}^{3}C\,(1...) + \text{etc.}$

VI. $V\,(1...) = {}^{1}pC\,(1...) + {}^{2}pC\,(1...) + {}^{3}pC\,(1...) + \text{etc.}$

VII. $^{5}C\,(1..) = {}^{1}_{5}C\,(1...) + {}^{2}_{5}C\,(1...) + {}^{3}_{5}C\,(1...) + \text{etc.}$

VIII. $^{5}V\,(1..) = {}^{1}_{5}pC\,(1..) + {}^{2}_{5}pC\,(1..) + {}^{3}_{5}pC\,(1...) + \text{etc.}$

167. Anwendungen. Eine Menge von Aufgaben, namentlich wo es auf Bestimmung der Wahrscheinlichkeit eines

Ereigniſſes ankommt, erfordern zu ihrer Löſung die Hülfe der combinatoriſchen Grundlehren. Einige Beiſpiele davon ſind folgende:

1) In wie vielen Folgen laſſen die acht Töne der Tonleiter ſich verbinden?

Nach §. 161 ist 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8 = 40320.

2) Wieviel verſchiedene Stellungen laſſen die Buchſtaben des Wortes Mathematik zu?

Nach §. 161 $\frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}{1.2.1.2.1.2.} = 453600.$

3) Wie viele verſchiedene Würfe ſind mit 8 Würfeln möglich?

Nach §. 162, weil jeder Würfel 6 Seiten hat, $6^8 = 1679616$.

4) Auf wie vielerlei Art kann unter allen Würfen mit 4 Würfeln ein Wurf von vier verſchiedenen Seiten vorkommen?

Nach §. 162 iſt die Anzahl ſolcher Würfe 6. 5. 4. 3 = 360.

5) Wieviel gänzlich verſchiedene Spiele kann ein Piquetſpieler in die Hand bekommen?

Der Karten ſind im Piquetſpiele 32, wovon jeder Spieler 12 erhält. Alſo iſt nach §. 163 die geſuchte Anzahl

$= \frac{32.31.....21}{1.2.....12} = 225792840$

6) Wie verhält ſich die Anzahl aller möglichen Quaternen, Ternen und Amben (Q, T, A) des Lotto's zu derjenigen (q, t, a) welche in einer einzelnen Ziehung wirklich erſcheinen können.

Da im Lotto 90 Nummern ſind, wovon nur 5 jedesmal herauskommen, ſo iſt nach §. 163:

$Q = \frac{90.89.88.87}{1.2.3.4} = 2555190;$ $q = \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4} = 5.$

$T = \frac{90.89.88}{1.2.3} = 117480;$ $t = \frac{5.4.3}{1.2.3} = 10.$

$A = \frac{90.89}{1.2} = 4005;$ $a = \frac{5.4}{1.2} = 10.$

7) Auf welche und wie vielerlei Art können mit 4 Würfeln 20 Augen geworfen werden?

Hier hat man nach §. 164 die sämmtlichen Formen des Inbegriffs $^{20}\overset{4}{C}(1\ldots6)^4$ zu suchen, nämlich 2666, 3566, 4466, 4556, 5555.

8) Wie vielmal kommt unter allen möglichen Würfen mit vier Würfeln der Wurf von 20 Augen vor?

Es ist nach §. 166 $^{20}\overset{4}{V}(1\ldots6)^4 = p\overset{4}{C}(1\ldots6)^4$ und ferner nach §. 161, $p(2666)=4$; $p(3566)=12$; $p(4466)=6$; $p(4556)=12$; $p(5555)=1$; Also giebt es unter den 1296 möglichen Würfen nur 35 zu 20 Augen.

Zweites Kapitel.

Die Grundoperationen mit Reihen.

168. Form der Reihen. Wenn eine Reihe aus einer bestimmten Anzahl von Gliedern besteht, so kann sie sowol fallend oder steigend angeordnet werden; schreitet sie hingegen in's Unbestimmte fort, so gilt nur eine jener Anordnungen nach dem allgemeinen Schema $ax^{\alpha}+bx^{\alpha+\delta}+cx^{\alpha+2\delta}+dx^{\alpha+3\delta}+\text{etc.}$, worin δ positiv oder negativ seyn kann. Diese allgemeinste Form einer, nach Potenzen der Hauptgröße gesetzmäßig fortschreitenden, Reihe läßt sich aber, indem man den gemeinsamen Factor x^{α} aus allen Gliedern absondert und $x^{\delta}=z$ setzt, zurückführen auf die einfachere:

$$a+bz+cz^2+dz^3+ez^4+\text{etc.},$$

worin die Coefficienten jeden beliebigen Zahlenwerth, Null eingeschlossen, haben können, die Exponenten aber in der Folge der natürlichen Zahlen forschreiten.

169. Combinatorische Bezeichnungsart. Man kann die Glieder solcher Reihen als Elemente betrachten, die nach gewissen Bestimmungen mit einander zu verbinden, also zusammenzustellen sind, und bezeichnet sie deshalb zweckmäßig ihrer Folge nach durch Indices (Stellenzahlen), die mit

den Exponenten der Hauptgröße identisch sind, hinsichtlich der Reihe aber, welcher sie angehören, durch unten angehängte Zahlen (Reihenzahlen.) Ist nur eine Reihe gegeben, so wird die Zusammenfassung von Gliedern derselben durch Combination angedeutet werden können, z. B. in Beziehung auf die Reihe $ax^0+bx^1+cx^2+dx^3$ der Ausdruck $\overset{3}{C}(0..3)=012, 013, 023, 123$, wenn die Elemente als Factoren angesehen werden sollen, nichts anders bedeuten, als $abc.x^3+abdx^4+acd.x^5+bcd.x^6$.

Sind hingegen mehrere Reihen vorhanden, so muß man die Zusammenstellung ihrer Glieder durch Variationsformen andeuten, weil hier jede einzelne Stelle einer Form sich auf eine besondere Reihe bezieht, weshalb man die Reihenzahlen, wie in $1_1 1_2 2_3$, $0_1 0_2 4_3$, als überflüssig aus den Formen weglassen, und nur für die Coefficienten selbst beibehalten kann. Sind die gegebenen Reihen:

$$a_1x^0+b_1x^1+c_1x^2$$
$$a_2x^0+b_2x^1+c_2x^2$$
$$a_3x^0+b_3x^1+c_3x^2$$

so bedeutet der Inbegriff der Variationsformen:

$$\overset{3}{V}(012)^3 = 000, 001, 002, 011, 020 \ldots\ldots 222,$$

wenn wiederum von Multiplication die Rede ist, die Summe der Producte:

$$a_1a_2a_3x^0+a_1a_2b_3x^1+a_1a_2c_3x^2+a_1b_2b_3x^3+a_1c_2a_3x^3\ldots$$
$$+c_1c_2c_3x^6.$$

Es darf nicht unbemerkt bleiben, daß die Summe der Elemente in jeder Form, wenn die Zusammenstellung Multiplication bedeutet, zugleich den Exponenten der Hauptgröße x für das Partialproduct giebt, welches durch die Variationsform angedeutet wird.

170. Addition und Subtraction. Die Regel, nach denen Reihen in eine Summe zusammengezogen werden, fordert (nach §. 48) nur eine Verbindung aller gleichhohen Glieder durch Addition ihrer Coefficienten, deren Summen durch die Bezeichnung $S(a)_n$ angedeutet werden können, wenn allgemein n Reihen gegeben sind.

$$a_1 x^0 + b_1 x^1 + c_1 x^2 + d_1 x^3 + \text{etc.}$$
$$a_2 x^0 + b_2 x^1 + c_2 x^2 + d_2 x^3 + \text{etc.}$$
$$a_3 x^0 + b_3 x^1 + c_3 x^2 + d_3 x^3 + \text{etc.}$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$a_n x^0 + b_n x^1 + c_n x^2 + d_n x^3 + \text{etc.}$$
$$\overline{S(a)_n x^0 + S(b)_n x^1 + S(c)_n x^2 + S(d)_n x^3 + \text{etc.}}$$

Sind Reihen zur Subtraction gegeben, so gelten hinsichtlich des Abziehens der gleichhohen Glieder, welches an den Coefficienten geschieht, die früher (§. 49) aufgestellten Regeln, wonach durch Aenderung der Vorzeichnung im Subtrahendus die Operation zur Addition wird. Will man durch $D(a)_2$ die Differenz $a_1 - a_2$ bezeichnen, so ist die Differenz zweier Reihen allgemein:

$$D(a)_2 x^0 + D(b)_2 x^1 + D(c)_2 x^2 + D(d)_2 x^3 + \text{etc.}$$

171. Multiplication. Sind mehrere Reihen zur Multiplication gegeben, so wird nach der allgemeinen Regel für vieltheilige Factoren (§. 50) jedes einzelne Glied der ersten mit jedem der zweiten Reihe, dann jedes Product solcher zwei Glieder in diejenigen der dritten Reihe, u. s. f. zu multipliciren seyn. Dasselbe Resultat muß aber hervorgehen, wenn man ohne diese stufenweise Multiplication unmittelbar alle Zusammenstellungen zu n Gliedern aus allen n vorhandenen Reihen genommen, d. h. alle Variationsformen zu n Elementen bildet und deren Werthe durch Substitution realisirt. Da aber die Exponenten mit den Stellenzahlen der Glieder identisch sind, so müssen die Variationsformen, damit das Product sogleich nach den Potenzen der Hauptgröße geordnet erscheine, nach der Summe ihres Inhalts dargestellt werden. Wären z. B. die drei Reihen im §. 169 zu multipliciren, so hätte man sämmtliche Formen von 000 bis 222 zu bilden auf folgende Art:

$$V(012)^3 = {}^3_0V x^0 + {}^3_1V x^1 + {}^3_2V x^2 + {}^3_3V x^3 + {}^3_4V x^4 + {}^3_5V x^5 + {}^3_6V x^6$$

Coefficient von x in der Reihe des Products von (x+4)(x+3)(x+6)(x+2)(x+7) verlangt, so ist das betreffende Glied $\overset{4}{C}x^1$ und

$$\overset{4}{C}(abcde) = abcd, abce, abde, acde, bcde.$$
$$= 4.3.6.2 + 4.3.6.7 + 4.3.2.7 + 4.6.2.7 + 3.6.2.7$$
$$= 144 + 504 + 168 + 336 + 252 = 1404.$$

173. Division. Um die allgemeine Aufgabe, der Division zweier Reihen, angedeutet durch

$$\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}}{a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.}}$$

zu erleichtern, denke man sich diese Form zerlegt in die Factoren

$$(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}) \text{ und } \frac{1}{(a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.})},$$

und setze die Reihe

$$(a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.}) = a\left(1 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}x^2 + \frac{d}{a}x^3 + \text{etc.}\right).$$

Man kann also, den gemeinsamen Factor a der Reihe $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.}$ als Divisor untersetzend, und die Coefficienten $\frac{b}{a}, \frac{c}{a} \ldots$ einfacher durch $\overset{1}{a}, \overset{2}{a} \ldots$ andeutend, den zur Division gegebenen Ausdruck zerlegen in die Factoren:

$$\left(\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}}{a}\right) \text{und } \left(\frac{1}{1 + \overset{1}{a}x + \overset{2}{a}x^2 + \overset{3}{a}x^3 + \text{etc.}}\right)$$

Die Betrachtung beschränkt sich lediglich auf die Entwickelung dieses zweiten Factors, weil deren Multiplication mit dem ersten, wodurch der vollständige Quotient zum Vorschein kommen wird, nach schon (im §. 172) erläuterten Regeln des Variirens auszuführen ist. Als Form jener Entwickelung darf man die Reihe $1 + \overset{1}{A}x + \overset{2}{A}x^2 + \overset{3}{A}x^3 + \text{etc.}$ annehmen, deren Coefficienten nur als Andeutungen zu betrachten und ihrem Werthe nach aus den gegebenen Coefficienten des Divisors $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}, \ldots$ näher zu bestimmen sind, weil sie nur von diesen abhängig oder Function seyn können.

Nach dieſen Vorbemerkungen iſt das einfachſte Schema der allgemeinen Diviſionsaufgabe der Analyſis:

$$\frac{1}{1+\overset{1}{a}x+\overset{2}{a}x^2+\overset{3}{a}x^3+\text{etc.}} = 1+\overset{1}{A}x+\overset{2}{A}x^2+\overset{3}{A}x^3+\text{etc.}$$

174. Coefficientenbeſtimmung Da der Dividendus als Product aus Diviviſor und Quotienten durch Multiplication beider vorſtehender Reihen wieder gewonnen werden muß, ſo iſt:

$$(1+\overset{1}{a}x+\overset{2}{a}x^2+\overset{3}{a}x^3+\text{etc.})\,(1+\overset{1}{A}x+\overset{2}{A}x^2+\overset{3}{A}x^3+\text{etc.}) = 1.$$

Die Entwickelung dieſes Products giebt aber die Reihe:

$$1+\left\{\begin{matrix}\overset{1}{A}\\ \overset{1}{a}\end{matrix}\right\}x+\left\{\begin{matrix}\overset{2}{A}\\ \overset{1}{a}\overset{1}{A}\\ \overset{2}{a}\end{matrix}\right\}x^2+\left\{\begin{matrix}\overset{3}{A}\\ \overset{1}{a}\overset{2}{A}\\ \overset{2}{a}\overset{1}{A}\\ \overset{3}{a}\end{matrix}\right\}x^3+\ldots\ldots+\left\{\begin{matrix}\overset{k}{A}\\ \overset{1}{a}\overset{k-1}{A}\\ \overset{2}{a}\overset{k-2}{A}\\ \cdot\\ \cdot\\ \overset{k-1}{a}\overset{1}{A}\\ \overset{k}{a}\end{matrix}\right\}x^k,$$

welche bei der völligen Unbeſtimmtheit des Werthes der Hauptgröße x nicht anders = 1 ſeyn kann, als wenn ſämmtliche Coefficienten der einzelnen Glieder für ſich = o ſind. Daraus ergeben ſich die Bedingungsgleichungen:

$$\overset{1}{A}=-\overset{1}{a};\quad \overset{2}{A}=-(\overset{1}{a}\overset{1}{A}+\overset{2}{a});\quad \overset{3}{A}=-(\overset{1}{a}\overset{2}{A}+\overset{2}{a}\overset{1}{A}+\overset{3}{a});$$

$$\text{allgemein } \overset{k}{A}=-(\overset{1}{a}\overset{k-1}{A}+\overset{2}{a}\overset{k-2}{A}+\ldots+\overset{k-1}{a}\overset{1}{A}+\overset{k}{a}).$$

Nach dieſer ſehr einfachen Recurſionsformel kann man leicht jeden nachfolgenden aus den früheren Coefficienten berechnen. Wäre z. B. der Ausdruck $\frac{1}{1-4x+5x^2-3x^3}$ in einer Reihe zu entwickeln, ſo hätte man $\overset{1}{a}=-4$, $\overset{2}{a}=5$, $\overset{3}{a}=-3$ $\overset{4}{a}=o$ und überhaupt $\overset{k}{a}=o$, wenn $k>3$ geſetzt wird; alſo:

Drittes Kapitel.

Die Potenzirung der Reihen.

176. **Potenz eines Binomiums.** Die Aufgabe, eine Reihe der allgemeinen Form $a+bx+cx^2+dx^3+$ etc. auf die Potenz eines beliebigen Exponenten zu erheben, beginnt am zweckmäßigsten mit dem einfachen Falle, wo die Reihe nur aus zwei Theilen besteht oder ein Binomium ist. Die Form $(a+bx)^n$ oder $b^n\left(\frac{a}{b}+x\right)^n = \beta(a+x)^n$ gestattet aber für n positive, negative und gebrochene Zahlenwerthe und bedeutet unter diesen verschiedenen Voraussetzungen Multiplication, Division und Wurzelausziehung, weshalb ihre Entwickelung für positive, negative und gebrochene Exponenten einzeln betrachtet werden muß.

177. **Binomischer Lehrsatz.** Die Erhebung des Binomiums auf den Exponenten der ganzen und positiven Zahl n ist offenbar ein besonderer Fall der Multiplication zweitheiliger Factoren (§. 172) in welchem alle diese Factoren identisch sind. Daher wird der dort gefundene Ausdruck des Products:

$$(a+x)(b+x)(c+x)(d+x)\ldots(u+x) = \overset{n}{C} + \overset{n-1}{C}x^1 + \overset{n-2}{C}x^2 + \ldots\ldots + \overset{1}{C}x^{n-1} + x^n,$$

in welchem die Andeutungen der Combination sich auf die verschiedenen Elemente a, b, c .. n bezogen, welche hier sämmtlich = a zu setzen sind, eine bestimmtere Gestalt annehmen, und statt bloßer Andeutungen vollständig gebildete Coefficienten der Hauptgröße x erhalten. Denn es werden hier alle Combinationsformen Potenzen von a, die mit dem zum Exponenten n ergänzenden Potenzen von x zusammentreten, und es braucht jedem einzelnen der Glieder $a^n x^0$, $a^{n-1}.x^1$, $a^{n-2}.x^2$, u. s. w. nur noch der Zahlencoefficient hinzugefügt zu werden, welcher angiebt, wievielmal es sich aus den n zweitheiligen Factoren hervorheben läßt. Dieß ist aber allgemein für das k^{te} Glied $a^{n-k}.x^k$ (nach §. 161) auf $\frac{n.n-1.n-2.n-3..3.2.1}{(1.2.3..k)(1.2.3..n-k)}$ oder

$\frac{n.n-1....n-k+1}{1.2.3....k}$ verschiedene Arten möglich, so daß die Reihe:

$$(a+x)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}x + \frac{n.n-1}{1.2}a^{n-2}x^2 + ...$$
$$+ \frac{n.n-1...n-k+1}{1.2....k}a^{n-k}x^k ... + x^n$$

als Entwickelung der Potenz eines Binomiums hervorgeht, sofern n eine beliebige ganze und positive Zahl ist. Das Gesetz dieses, unter dem Namen des binomischen oder Newton'schen Lehrsatzes bekannten, Entwickelung liegt in der gleichmäßigen Abnahme der Potenzen von a und Zunahme derjenigen von x, so daß ihre Exponentensumme in jedem Gliede $= n$ bleibt, und in der allmähligen Bildung der Coefficienten ihrer Producte durch Erweiterung des Zählers und Nenners um einen Factor, der um 1 abnimmt oder steigt, so daß es leicht ist, jedes folgende Glied aus dem vorhergehenden vollständig zu bilden. Eine noch einfachere Gestalt erhält der binomische Lehrsatz, wenn man $(a+x)^n = a^n\left(1+\frac{x}{a}\right)^n$ oder $a^n(1+z)^n$ setzt, so daß der erste Theil des Binomiums 1 wird; denn in diesem Falle wird seine Entwickelung:

$$(1+z)^n = 1 + \frac{n}{1}z + \frac{n.n-1}{1.2}z^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}z^3 ..$$
$$+ \frac{n.n-1..n-k+1}{1.2....k}z^k ... + z^n$$

178. Binomialcoefficienten. Da die Coefficienten dieser Reihe so häufig vorkommen, pflegt man sie durch die Bezeichnung ${}^1_n\mathfrak{B}$, ${}^2_n\mathfrak{B}$ ... ${}^k_n\mathfrak{B}$ anzudeuten, worin n sich auf die Potenz, k auf die Stelle bezieht, so daß kürzer

$$\frac{n.n-1.n-2....n-k+1}{1.2.3....k} = {}^k_n\mathfrak{B}$$

gesetzt wird. Es folgt nun aber aus der Entstehung dieser Coefficienten, daß diejenigen Glieder, welche wie $a^{n-1}x$ und ax^{n-1}, $a^{n-2}x^2$ und a^2x^{n-2}, $a^{n-k}x^k$ und a^kx^{n-k}, gleichweit vom Anfang und Ende der Reihe abstehen, auch gleiche Binomialcoefficienten haben müssen oder daß allgemein ${}^k_n\mathfrak{B} = {}^{n-k}_n\mathfrak{B}$ ist, so daß es hinreicht, diese Zahlen bis zur Mitte

der Reihe bestimmt zu haben, weil sie von da in umgekehrter Ordnung wiederkehren. Auch kann man von den Binomialcoefficienten einer Potenz n leicht zu denen der nächsthöheren n+1 übergehen, indem man je zwei benachbarte addirt. Denn es ist mit Hinzufügung des Factors $\left(\frac{k+1}{k+1}\right) = 1$:

$$ {}^{k}_{n}\mathfrak{B} = \frac{n.n-1.n-2\ldots n-k+1}{1.2.3\ldots\ldots k} \cdot \frac{k+1}{k+1}, $$

$$ {}^{k+1}_{n}\mathfrak{B} = \frac{n.n-1.n-2\ldots(n-k+1)(n-)k}{1.2.3\ldots\ldots k.k+1}, $$

$$ \text{folglich } {}^{k}_{n}\mathfrak{B} + {}^{k+1}_{n}\mathfrak{B} = \left(\frac{n.n-1\ldots n-k+1}{1.2\ldots k}\right)\left(\frac{n+1}{k+1}\right) $$

oder nach der vereinfachenden Bezeichnung $= {}^{k}_{n+1}\mathfrak{B}$, wodurch die Indentität der Binomialcoefficienten und der figurirten Zahlen (§. 145), die auf die nämliche Art durch Addition entstanden, nachzuweisen ist. Man kann also, wie da leicht eine Tafel dieser Zahlenwerthe entwerfen, die so anfangen wird.

Potenz n	Binomialcoefficienten.								
	0 ${}_{n}\mathfrak{B}$	1 ${}_{n}\mathfrak{B}$	2 ${}_{n}\mathfrak{B}$	3 ${}_{n}\mathfrak{B}$	4 ${}_{n}\mathfrak{B}$	5 ${}_{n}\mathfrak{B}$	6 ${}_{n}\mathfrak{B}$	7 ${}_{n}\mathfrak{B}$	8 ${}_{n}\mathfrak{B}$
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

Daß die Summe einer jeden solchen Coefficientenreihe eine höhere Potenz von 2 seyn müsse, geht ferner aus der Substitution von 1 für a und x hervor; denn dadurch wird die obige Entwickelung:

$$ (1+1)^n = 1 + {}^{1}_{n}\mathfrak{B} + {}^{2}_{n}\mathfrak{B} + {}^{3}_{n}\mathfrak{B} \ldots + {}^{k}_{n}\mathfrak{B} \ldots\ldots + {}^{n-1}_{n}\mathfrak{B} + 1. $$

179. Bin. Lehrsatz für negative Exponenten. Daß das Gesetz der binomischen Entwickelung für negative wie für positive ganze Exponenten das nämliche sey, beweist man dadurch, daß die hypothetisch angenommenen, nach jenem Gesetz fortschreitende Reihe:

$$(1+x)^{-n} = 1 + {}^{-n}\mathfrak{B}^{1}x + {}^{-n}\mathfrak{B}^{2}x^2 + {}^{-n}\mathfrak{B}^{3}x^3 + {}^{-n}\mathfrak{B}^{4}x^4 + \text{etc.}$$

mit $(1+x)^{n} = 1 + {}^{n}\mathfrak{B}^{1}x + {}^{n}\mathfrak{B}^{2}x^2 + {}^{n}\mathfrak{B}^{3}x^3 + {}^{n}\mathfrak{B}^{4}x^4 + \text{etc.}$

multiplicirt, die folgende hervorbringt:

$$(1+x)^{-n}.\ (1+x)^{n} = 1 + \left.\begin{matrix} {}^{-n}\mathfrak{B}^{1} \\ {}^{n}\mathfrak{B}^{1} \end{matrix}\right\} x + \left.\begin{matrix} {}^{-n}\mathfrak{B}^{2} \\ {}^{-n}\mathfrak{B}^{1}.\ {}^{n}\mathfrak{B}^{1} \\ {}^{n}\mathfrak{B}^{2} \end{matrix}\right\} x^2 +$$

$$\left.\begin{matrix} {}^{-n}\mathfrak{B}^{3} \\ {}^{-n}\mathfrak{B}^{2}.\ {}^{n}\mathfrak{B}^{1} \\ {}^{-n}\mathfrak{B}^{1}.\ {}^{n}\mathfrak{B}^{2} \\ {}^{n}\mathfrak{B}^{3} \end{matrix}\right\} x^3 + \text{etc.}$$

worin die Coefficienten der Potenzen von x, weil diese Größe jedes beliebigen Werthes fähig ist, sämmtlich = o seyn müssen, damit der Werth der Reihe $= (1+x)^{-n}.\ (1+x)$ d. h. = 1 werde. In der That ist aber

1) $-n+n=o.$

2) $\dfrac{(-n)(-n-1)}{1.2.} + (-n).n + \dfrac{n(n-1)}{1.2} = o.$

3) $\dfrac{(-n)(-n-1)(-n-1)}{1.2.3} + \dfrac{(-n)(-n-1)n}{1.2}$

$$+(-n)\,\frac{n(n-1)}{1.2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} = o.$$

u. s. w., wie man bei Zusammenziehung dieser Ausdrücke leicht erkennt. Also muß das Bildungsgesetz für die Binomialcoefficienten ${}^{-n}\mathfrak{B}^{1}$, ${}^{-n}\mathfrak{B}^{2}$, ${}^{-n}\mathfrak{B}^{3}$, etc. in der entwickelten Potenz eines Binomiums mit negativen Exponenten dasselbe seyn,

welches oben unter der Voraussetzung eines positiven Exponenten gefunden wurde.

180. Bin. Lehrsatz für gebrochene Exponenten. Um den Beweis der Allgemeinheit der obigen Entwickelung auch auf gebrochene Exponenten (durch r angedeutet) auszudehnen, multiplicire man die hypothetisch angenommene Reihe

$$(1+x)^r = 1 + {}^r\mathfrak{B}^1 x + {}^r\mathfrak{B}^2 x^2 + {}^r\mathfrak{B}^3 x^3 + {}^r\mathfrak{B}^4 x^4 + \text{etc.}$$

mit $(1+x)^{r-r} = 1 + {}^{r-r}\mathfrak{B}^1 x + {}^{r-r}\mathfrak{B}^2 x^2 + {}^{r-r}\mathfrak{B}^3 x^3 + {}^{r-r}\mathfrak{B}^4 x^4 + \text{etc.}$

Das Product beider entwickelt sich in der neuen Reihe:

$$(1+x)^r.(1+x)^{r-r} = 1 + {}^r\mathfrak{B}^1 + {}^{r-r}\mathfrak{B}^1 \Big\{ x + {}^r\mathfrak{B}^2 + {}^r\mathfrak{B}^1 {}^{r-r}\mathfrak{B}^1 + {}^{r-r}\mathfrak{B}^2 \Big\} x^2 + {}^r\mathfrak{B}^3 + {}^r\mathfrak{B}^2 {}^{r-r}\mathfrak{B}^1 + {}^r\mathfrak{B}^1 {}^{r-r}\mathfrak{B}^2 + {}^{r-r}\mathfrak{B}^3 \Big\} x^3 + \text{etc.}$$

Soll das Bildungsgesetz für die Binomialcoefficienten auch hier gültig seyn, so muß die Reihe, was auch immer der Werth von x seyn möge, sich auf $(1+x)^r.(1+x)^{r-r} = 1+x$ zusammenziehen, und dieß ist nur möglich, wenn

1) $r-(1-r) = 1.$

2) $\frac{r.r-1}{1.2} + (1-r)r + \frac{(1-r)(1-r-1)}{1.2} = 0.$

3) $\frac{r.r-1.r-2}{1.2.3} + \frac{r.r-1}{1.2}.(1-r) + r.\frac{(1-r)(1-r-1)}{1.2.} + \frac{(1-r)(1-r-1)(1-r-2)}{1.2.3} = 0.$

u. s. w., wovon die Richtigkeit bei der Zusammenziehung der einzelnen Glieder sich sogleich ergiebt. Also auch für gebrochene Exponenten des Binomiums gilt die obige Bildungsregel der Binomialcoefficienten.

181. Anwendungen. Von der Anwendung dieses wichtigsten Theorems der Analysis mögen hier einige Beispiele folgen:

1) Das 14te Glied nach dem anfänglichen in der Entwickelung von $(a+x)^{30}$ ist (nach §. 177):

$$^{14}_{30}\mathfrak{B}.a^{16}.x^{14}=\frac{30.29.28..17}{1.2.3...14}a^{16}.x^{14}=23861925a^{16}.x^{14}.$$

2) Der Quotient $\frac{1}{(a+x)^2}$, mit Hülfe des binomischen Lehrsatzes entwickelt, ist:

$$(a+x)^{-2}=a^{-2}-2a^{-3}x+3a^{-4}x^2-4a^{-5}x^3,$$
$$+5a^{-6}x^4-6a^{-7}x^5+\text{etc.}$$

3) Als 5te Wurzel aus $(a+x)$ findet man nach dem binomischen Lehrsatze die Reihe:

$$(a+x)^{\frac{1}{5}}=a^{\frac{1}{5}}+\frac{1}{5}a^{-\frac{4}{5}}.x-\frac{1.4}{2.5^2}a^{-\frac{9}{5}}x^2+\frac{1.4.9}{2.3.5^3}a^{-\frac{14}{5}}x^3$$
$$-\frac{1.4.9.14}{2.3.4.5^4}a^{-\frac{19}{5}}x^4+\text{etc.}$$

$$\text{oder}=a^{\frac{1}{5}}\left\{1+\frac{1}{5}\left(\frac{x}{a}\right)-\frac{1.4}{2.5^2}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\frac{1.4.9}{2.3.5^3}\left(\frac{x}{a}\right)^3\right.$$
$$\left.-\frac{1.4.9.14}{2.3.4.5^4}\left(\frac{x}{a}\right)^4+\text{etc.}\right\}$$

Dieser Ausdruck kann zur Ausziehung der fünften Wurzel aus einer dekadischen Zahl benutzt werden, indem man die nächstniedrige reine fünfte Potenz $=a$ und den Rest $=x$ setzt. Sey z. B. die gegebene Zahl 260, so ist $a=243$, und $x=17$, also $a^{\frac{1}{5}}$ oder $\sqrt[5]{a}=3$; $\frac{x}{a}=\frac{17}{243}$; und

$$260^{\frac{1}{5}}=3\left\{1+0{,}0139918-0{,}0003915+0{,}0000164\right.$$
$$\left.-0{,}0000008+\text{etc.}\right\}$$

oder zusammengezogen $=3{,}04084....$

4) $(a+bi)^n+(a-bi)^n=2\left(a^n-{}^{2}_{n}\mathfrak{B}a^{n-2}b^2+{}^{4}_{n}\mathfrak{B}a^{n-4}b^4..\right.$
$$\left.\pm{}^{2k}_{n}\mathfrak{B}a^{n-2k}.b^{2k}...\right)$$

5) $(a+bi)^n-(a-bi)^n=2i\left({}^{1}_{n}\mathfrak{B}a^{n-1}b-{}^{3}_{n}\mathfrak{B}a^{n-3}b^3\right.$
$$\left.+{}^{5}_{n}\mathfrak{B}a^{n-5}b^5...\pm{}^{2k+1}_{n}\mathfrak{B}a^{n-2k-1}b^{2k+1}...\right)$$

6) $(1+z)^{\frac{n}{m}}=1+\frac{n}{m}z+\frac{n.n+m}{m.2m}z^2$
$$-\frac{n.n+m.n+2m}{m.2m.3m}z^3....\pm\frac{n.n+m..n+(k-1)m}{m.2m....km}z^r..$$

182. Polynomischer Lehrsatz. Um eine Reihe der allgemeinen Form $a+bx+cx^2+dx^3+$ etc. oder einfacher $a(1+\overset{1}{a}x+\overset{2}{a}x^2+\overset{3}{a}x^3+$ etc.) auf irgend eine n^{te} Potenz zu erheben, darf man nur, den Inbegriff aller nachfolgenden Glieder $\overset{1}{a}x+\overset{2}{a}x^2+\overset{3}{a}x^3+$ etc. durch ein einfaches Zeichen y darstellend, den binomischen Lehrsatz anwenden. Wird dann in der Reihe

$$(1+y)^n=1+{}^n\overset{1}{\mathfrak{B}}y+{}^n\overset{2}{\mathfrak{B}}y^2+{}^n\overset{3}{\mathfrak{B}}y^3+{}^n\overset{4}{\mathfrak{B}}y^4+\text{etc.}$$

der Werth von y substituirt, so erhält man nach den Regeln der Multiplication:

$$\left(\overset{1}{a}x+\overset{2}{a}x^2+\overset{3}{a}x^3+\text{etc.}\right)^2=\overset{2}{V}x^2+\overset{2}{V}x^3+\overset{2}{V}x^4+\overset{2}{V}x^5+\text{etc.}$$

$$\left(\overset{1}{a}x+\overset{2}{a}x^2+\overset{3}{a}x^3+\text{etc.}\right)^3=\overset{3}{V}x^3+\overset{3}{V}x^4+\overset{3}{V}x^5+\overset{3}{V}x^6+\text{etc.}$$

Da aber hier die Variationsformen aus identischen Elementenreihen oder aus der einen Reihe $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}, \overset{4}{a}\ldots$ gebildet werden sollen, so darf man nur die Combinationsformen darstellen, und einer jeden Complexion die Zahl ihrer möglichen Permutationen als Factor hinzufügen oder allgemein ${}^n\overset{k}{V}={}^p\overset{k}{C}$ setzen. Dann erscheint die Entwickelung des Polynomiums in folgender Gestalt:

$$\left\{1+\left(\overset{1}{a}x+\overset{2}{a}x^2+\overset{3}{a}x^3+\overset{4}{a}x^4+\text{etc.}\right)\right\}^n=$$
$$1+{}^n\overset{1}{\mathfrak{B}}\left({}^{1\,1}_{p}Cx+{}^{2\,1}_{p}Cx^2+{}^{3\,1}_{p}Cx^3+\text{etc.}\right)$$
$$+{}^n\overset{2}{\mathfrak{B}}\left({}^{2\,2}_{p}Cx^2+{}^{3\,2}_{p}Cx^3+{}^{4\,2}_{p}Cx^4+\text{etc.}\right)$$
$$+{}^n\overset{3}{\mathfrak{B}}\left({}^{3\,3}_{p}Cx^3+{}^{4\,3}_{p}Cx^4+{}^{5\,3}_{p}Cx^5+\text{etc.}\right)\text{ u. s. w.}$$

Um nun in der, nach den Potenzen von x noch anzuordnenden, Reihe die Coefficienten zu bestimmen, muß man die Glieder gleichen Ranges aus der vorliegenden Entwickelung in eine Summe zusammenziehen und dadurch derselben diese Form geben:

$$\left(1+\overset{1}{a}x+\overset{2}{a}x^2+\overset{3}{a}x^3+\text{etc.}\right)^n = 1+\left({}^n\overset{1\ 1}{B}.pC\right)x$$
$$+\left({}^n\overset{1\ 2}{B}.pC+{}^n\overset{2\ 2}{B}.pC\right)x^2+\left({}^n\overset{1\ 3}{B}.pC+{}^n\overset{2\ 3}{B}.pC\right.$$
$$\left.+{}^n\overset{3\ 3}{B}.pC\right)x^3+\left({}^n\overset{1\ 4}{B}.pC+{}^n\overset{2\ 4}{B}.pC+{}^n\overset{3\ 4}{B}.pC\right.$$
$$\left.+{}^n\overset{4\ 4}{B}.pC\right)x^4+\text{etc.}$$

Allgemein ist also der Polynomialcoefficient des k^{ten} Gliedes nach dem anfänglichen:

$${}^n\overset{k}{P} = {}^n\overset{1\ k}{B}.pC+{}^n\overset{2\ k}{B}.pC+{}^n\overset{3\ k}{B}.pC\ldots.+{}^n\overset{k\ k}{B}.pC.$$

183. Anwendungen. 1) Um den Polynomialcoefficienten des 8ten Gliedes nach dem anfänglichen in der Entwickelung von $(1+\overset{1}{a}x+\overset{2}{a}x^2+\overset{3}{a}x^3+\text{etc.})^4$ zu erhalten, bilde man nach dem combinatorischen Ausdrucke

$${}^4\overset{8}{P} = {}^4\overset{1\ 8}{B}.pC+{}^4\overset{2\ 8}{B}.pC+{}^4\overset{3\ 8}{B}.pC+{}^4\overset{4\ 8}{B}.pC\ldots+{}^4\overset{8\ 8}{B}.pC.$$

die Complexionen 8; 17, 26, 35, 44; 116, 125, 134, 224, 233; 1115, 1124, 1133, 1223, 2222; und setze ihnen die zugehörige Permutationszahl als Factor bei. Die Formen aus 5 und mehr Elementen brauchen nicht gebildet zu werden, weil die Coefficienten ${}^5\overset{4}{B}$, ${}^5\overset{5}{B}\ldots.{}^4\overset{8}{B}$ sämmtlich $= o$ sind. Das vollständig gebildete 8te Glied nach dem anfänglichen ist also in der Entwickelung:

$$a^4.{}^4\overset{8}{P}x^8 = a^4\left\{\overset{8}{4}a+6\left(\overset{17}{2}aa+\overset{26}{2}aa+\overset{35}{2}aa+\overset{44}{a}a\right)\right.$$
$$+4\left(\overset{116}{3}aaa+\overset{125}{6}aaa+\overset{134}{6}aaa+\overset{224}{3}aaa+\overset{233}{3}aaa\right)$$
$$\left.+1.\left(\overset{1115}{4}aaaa+\overset{1124}{12}aaaa+\overset{1133}{6}aaaa+\overset{1223}{12}aaaa\right.\right.$$
$$\left.\left.+\overset{2}{a}^4\right)\right\}x^8$$

2) Wird die Hauptgröße $x = 1$ gesetzt, also das Polynomium nur als Summe mehrerer Theile betrachtet, die nach keinem bestimmten Gesetze fortschreiten, so ist die Form der Partialproducte, aus denen die Potenz sich zusammensetzt,

$$p.\overset{\alpha}{a}\,\overset{\beta}{b}\,\overset{\gamma}{c}\,\overset{\delta}{d}\ldots.\overset{\varphi}{f}$$

wenn nämlich $\alpha+\beta+\gamma+\delta..+\varphi=n$;

und $p=\frac{n.n-1.n-2.n-3.....3.2.1.}{(1.2..\alpha)(1.2..\beta)(1.2..\gamma)(1.2..\delta)(1.2..\varphi)}$

denn nach dem Begriffe der Multiplication n gleicher Factoren $(a+b+c+d....+f)$ bildet das Product sich durch alle mögliche Zusammenstellungen von n Elementen aus den gegebenen Reihen, so daß die Exponentensummen in jedem Gliede der Entwickelung $=n$ seyn, und die zugehörige Permutationszahl ihm hinzugefügt werden muß. Bezeichnet man kürzer die Producte der natürlichen Zahlenreihen $(1.2..n)$, $(1.2..\alpha)$,.. durch n^x α^x, u. s. w., so ist der summatorische Ausdruck eines Polynomiums der vorliegenden Art:

$$(a+b+c+d+....+f)^n=\int\frac{n'}{\alpha'.\beta'.\gamma'.\delta'..\varphi'}\,a.b.c.d...f^{\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varphi}$$

unter der Bedingung, daß $\alpha+\beta+\gamma+\delta..\varphi=n$, welches aus der Zahlenreihe von o bis n alle verschiedenen Zusammenstellungen der Summe n gebildet werden müssen, indem man so viele Zahlen verbindet, als Elemente im Polynomium gegeben sind.

Viertes Kapitel.

Die Exponentenreihen.

184. Exponential- und logar. Reihe. Wenn im Vorhergehenden für die Reihe des entwickelten Binomiums $(1+x)^n$ der Grundfactor die Hauptgröße, der Exponent hingegen als Nebengröße deren Coefficienten lieferte, so läßt sich umgekehrt ebensowol eine Entwickelung der Form $(1+z)^x$ denken, deren Glieder nach den Potenzen des Exponenten fortschreiten und ihre Coefficienten aus dem Grundfactor gebildet erhalten. Man kann eine solche Entwickelung eine Exponentialreihe nennen. Soll aber nicht der Werth der Potenz durch den Exponenten, sondern vielmehr der Werth des letztern, der in diesem Falle (nach §. 127) Logarithmus heißt, in Function des Zahlenwerthes der Potenz dargestellt werden (so daß $x=f(z)$ entwickelt werde, u)$^x=(1+z)$ ist, so nennt man die Reihe

eine logarithmische. Beide Entwickelungen, die die gegenseitige Bestimmung der Potenz und des Exponenten darstellen sollen, können deshalb füglich mit dem gemeinschaftlichen Namen der Exponentenreihen belegt werden.

185. Exponentialreihe. Die einfachste Form der zu entwickelnden Exponentialgröße $(1+z)^x$ liefert durch Anwendung des binomischen Lehrsatzes die Reihe:

$$1+{}^{x}\mathfrak{B}^{1}z+{}^{x}\mathfrak{B}^{2}z^2+{}^{x}\mathfrak{B}^{3}z^3+{}^{x}\mathfrak{B}^{4}z^4+\ldots\ldots+{}^{x}\mathfrak{B}^{k}z^k\ldots$$

welche bei der völligen Unbestimmtheit des Exponenten als unbegränzt angesehen werden muß. Um ihr die allein gültige Gestalt einer Anordnung nach den Potenzen der Hauptgröße x zu ertheilen, so daß

$$(1+z)^x=1+\overset{1}{A}x+\overset{2}{A}x^2+\overset{3}{A}x^3+\ldots+\overset{k}{A}x^k\ldots$$

entwickelt erscheinen, suche man vor Allem den Coefficienten $\overset{1}{A}$ zu bestimmen. Offenbar wird dieser Coefficient selbst eine unendliche Reihe, da er aus allen Gliedern der obigen Binomial-Entwickelung einen Beitrag erhält; nämlich aus

$${}^{x}\mathfrak{B}^{1}z=x.z.\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ den Beitrag } z.$$

$${}^{x}\mathfrak{B}^{2}z^2=\frac{x.x-1}{1.2}z^2=\frac{z^2}{2}x^2-\frac{z^2}{2}x \text{ den Beitr. } -\frac{z^2}{2}$$

$${}^{x}\mathfrak{B}^{3}z^3=\frac{x.x-1.x-2}{1.2.3}z^3=\frac{z^3}{6}x^3-\frac{z^3}{2}x^2+\frac{z^3}{3}x \text{ d. Beitr. } +\frac{z^3}{3}$$

Allgemein liefert das k^{te} Glied nach dem anfänglichen:

$${}^{x}\mathfrak{B}^{k}z^k=\frac{x.x-1.x-2.\ldots.x-k+1}{1.2.3.\ldots\ldots k}z^k,$$

dessen entwickeltes Product mit $x(-1)(-2)..(-k+1)\frac{z^k}{1.2..k}$ schließen muß, indem man $(-1)(-2)\ldots(-k+1)=(1.2.3\ldots k-1)(-1)^{k-1}$ setzt, als Beitrag zu dem Coefficienten $\overset{1}{A}$ den Theil

$$\frac{(1.2.3\ldots.k-1)(-1)^{k-1}.z^k}{1.2.3\ldots\ldots k}=(-1)^{k-1}.\frac{z^k}{k},$$

so daß die Reihe, wodurch der Coefficient von x in der Entwickelung von $(1+z)^x+$ gegeben wird, folgende ist:

verwandelt. Diese irrationale Zahl, dem Gebrauche gemäß kürzer durch e angedeutet, ist mithin die Grundzahl des natürlichen Systems, welches wegen der steten Convergenz seiner Grundform (III.), welchen Werth man auch für x ansetzen möge, vor allen andern brauchbar erscheint. Um aber von dem bereits berechneten natürlichen Potenzensysteme zu einem andern überzugehen, dessen Basis $= b$ ist, darf man nur unter den verschiedenen Potenzen von e den Werth von $b = e^{\beta}$ suchen, wodurch β gefunden wird, oder $\beta = \log. b$ setzen: dann ist

$$b^x = e^{(\beta x)} = 1 + (\beta x) + \frac{(\beta x)^2}{1.2} + \frac{(\beta x)^3}{1.2.3} + \frac{(\beta x)^4}{1.2.3.4} + \frac{(\beta x)^k}{1.2..k} \cdots$$

oder IV. $$b^x = 1 + \log. b. x + \frac{(\log. b. x)^2}{1.2} + \frac{(\log. b. x)^3}{1.2.3} \cdots + \frac{(\log. b. x)^k}{1.2 \ldots k} \cdots$$

188. Logarithmische Reihe. Wenn nicht die Entwickelung der Potenz in Function des Exponenten, sondern umgekehrt die Bestimmung des Exponenten (oder Logarithmus) aus dem Werthe der Potenz gefordert wird, so ist allgemein in dem Ausdrucke $(1+a)^x = 1 + z$ der Werth von x in Function von z darzustellen, wobei die Basis $(1+a)$ nur die Coefficienten zu dieser Entwickelung liefern kann. Die Form der logarithmischen Reihe sey nun, weil für $z = o$ ebenfalls $\log. (1+z) = o$ ist:

$$\text{Log.}(1+z) = {}^{1}Az + {}^{2}Az^2 + {}^{3}Az^3 + {}^{4}Az^4 + \ldots + {}^{k}Az^k \ldots$$

so entsteht durch Verdoppelnng der Hauptgröße die Gleichung:

$$\text{Log.}(1+2z) = 2\,{}^{1}Az + 2^2\,{}^{2}Az^2 + 2^3\,{}^{3}Az^3 + 2^4\,{}^{4}Az^4 \ldots\ldots + 2^k\,{}^{k}Az^k \ldots$$

Vermöge dieser beiden Reihen erhält man für den Ausdruck:

$$\text{Log.}(1+2z) - \text{Log.}(1+z) + \text{Log.}\left(\frac{1+2z}{1+z}\right) \text{ oder Log.} \ldots\ldots \left(1 + \frac{z}{1+z}\right)$$

ppelte Formen der Entwickelung, durch deren Gleichsetzung die
oefficienten $\overset{1}{A}, \overset{2}{A}, \overset{3}{A} \ldots$ ausgemittelt werden können.

189. Coefficientenbestimmung. Nach der oben im Grunde gelegten Form der logarithmischen Reihe, worin e Coefficienten unbestimmt angedeutet, aber für alle belie, gen Werthe der Hauptgröße z immer die nämlichen sind, it man:

$$\log.\left(1+\frac{z}{1+z}\right) = \overset{1}{A}\left(\frac{z}{1+z}\right) + \overset{2}{A}\left(\frac{z}{1+z}\right)^2 + \overset{3}{A}\left(\frac{z}{1+z}\right)^3 + \overset{4}{A}\left(\frac{z}{1+z}\right)^4 + \text{etc.}$$

id da durch wirklich ausgeführte Division:

$$\frac{\overset{1}{A}z}{1+z} = \overset{1}{A}z - \overset{1}{A}z^2 + \overset{1}{A}z^3 - \overset{1}{A}z^4 + \overset{1}{A}z^5 - \overset{1}{A}z^6 \ldots.$$

$$\frac{\overset{2}{A}z^2}{(1+z)^2} = \frac{\overset{2}{A}z^2}{1+2z+z^2} = \overset{2}{A}z^2 - 2\overset{2}{A}z^3 + 3\overset{2}{A}z^4 - 4\overset{2}{A}z^5 \ldots$$

$$\frac{\overset{3}{A}z^3}{(1+z)^3} = \frac{\overset{3}{A}z^3}{1+3z+3z^2+z^3} = \overset{3}{A}z^3 - 3\overset{3}{A}z^4 + 4\overset{3}{A}z^5 \ldots.$$

$$\frac{\overset{4}{A}z^4}{(1+z)^4} = \frac{\overset{4}{A}z^4}{1+4z+6z^2+4z^3+z^4} = \overset{4}{A}z^4 - 4\overset{4}{A}z^5 \ldots..$$

:funden wird, so ist nach den Potenzen von z entwickelt:

$$\log.\left(1+\frac{z}{1+z}\right) = \left.\begin{matrix}\overset{1}{A}z - \overset{1}{A} \\ + \overset{2}{A}\end{matrix}\right\} z^2 \left.\begin{matrix}+\overset{1}{A} \\ -2\overset{2}{A} \\ +\overset{3}{A}\end{matrix}\right\} z^3 \left.\begin{matrix}-\overset{1}{A} \\ +3\overset{2}{A} \\ -3\overset{3}{A} \\ +\overset{4}{A}\end{matrix}\right\} z^4$$

$$\left.\begin{matrix}+\overset{1}{A} \\ -4\overset{2}{A} \\ +6\overset{3}{A} \\ -4\overset{4}{A} \\ +\overset{5}{A}\end{matrix}\right\} z^5 - \text{etc.}$$

Ferner darf man, um einen andern Werth desselben Ausdrucks zu erhalten, nur die oben für log. $(1+z)$ und log. $(1+2z)$ gesetzten Reihen von einander subtrahiren, und erhält:

$$\log.\left(\frac{1+2z}{1+z}\right) = (2-1)\overset{1}{A}z+(4-1)\overset{2}{A}z^2+(8-1)\overset{3}{A}z^3 + (16-1)\overset{4}{A}z^4 + \text{etc.}$$

Da nun diese beiden Reihen als zwiefache Entwickelungen derselben Größe übereinstimmen müssen, welche Werthe auch für z gesetzt werden mögen, was aber durch die Identität der Coefficienten gleichhoher Potenzen von z möglich ist, so erhält man für die unbestimmt angedeuteten Coefficienten $\overset{1}{A}, \overset{2}{A}, \overset{3}{A}\ldots$ der logarithmischen Reihe in die Bedingungsgleichungen:

1) $\overset{1}{A} = \overset{1}{A}$, d. h. der Werth von $\overset{1}{A}$ muß ursprünglich bestimmt werden.

2) $3\overset{2}{A} = -\overset{1}{A}+\overset{2}{A}$, also $2\overset{2}{A} = -\overset{1}{A}$ oder $\overset{2}{A} = -\frac{\overset{1}{A}}{2}$

3) $7\overset{3}{A} = \overset{1}{A}-2\overset{2}{A}+\overset{3}{A}$, also $6\overset{3}{A} = \overset{1}{A}-2\overset{2}{A}$, od. $\overset{3}{A} = +\frac{\overset{1}{A}}{3}$

4) $15\overset{4}{A} = -\overset{1}{A}+3\overset{2}{A}-3\overset{3}{A}+\overset{4}{A}$, also $\overset{4}{A} = -\frac{\overset{1}{A}}{4}$

wonach der Coefficient des k^{ten} Gliedes nach dem anfänglichen in der Reihe . . . . . $\overset{k}{A} = \pm\frac{\overset{1}{A}}{k}$

gesetzt werden darf. Dadurch ist nun die Entwickelung eines Logarithmus in Function der Potenz gefunden als:

$$\text{V. } \log.(1+z) = \overset{1}{A}\left(z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\frac{z^5}{5}\ldots. \pm\frac{z^k}{k}\ldots\right)$$

190. Logar. Modulus. Wird der von der Grundzahl b oder $(1+a)$ des Systems abhängige Coefficient $\overset{1}{A}$, den man **den logarithmischen Modulus** nennt, $= 1$

angenommen, so erkennt man in der einfachen Reihe $(z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3-\frac{1}{4}z^4+$ etc.) den Ausdruck des Exponential-modulus wieder, dessen Zahlenwerth (nach §. 187) dann $=1$ wurde, wenn man $(1+z)=e$ oder 2,7182818.. setzte. Folglich zieht sich die Form

$$(1+a)^x \text{ oder } (1+a)^{\frac{1}{A}\left(z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\text{etc.}\right)} = (1+z)$$

wenn man den Exponenten $x=1$ und $(1+z)=e$ setzt, zusammen auf den Ausdruck $(1+a)=e$. Für diesen Werth der Basis können die Logarithmen am einfachsten berechnet und deshalb zur Unterscheidung von andern natürliche Logarithmen genannt werden. Allgemein findet man nun den log. Modulus für eine beliebige Basis b oder $(1+a)$ auf folgende Art. Es ist, weil $(1+a)^x=(1+z)$, auch $x.\log.(1+a)=\log.(1+z)$ oder wenn man für x seinen Werth $\frac{1}{A}\left(z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\text{etc.}\right)$ setzt:

$$\frac{1}{A}\left(z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\text{etc.}\right).\log.(1+a)=\log.(1+z)$$

und wenn in diesem Ausdrucke für $(1+z)$ der besondere Zahlenwerth e substituirt und damit $\left(z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\text{etc.}\right)=1$ gesetzt wird:

$$\frac{1}{A}.\log.(1+a)=\log.e, \text{ also } \frac{1}{A}=\frac{\log.e}{\log.(1+a)}=\frac{1}{\log.(1+a)},$$

d. h. der Modulus eines logarithmischen Systems ist der Quotient der Einheit, durch den natürlichen Logarithmus seiner Basis dividirt. —

191. Logarithmenberechnung. Für die wirkliche Berechnung der natürlichen Logarithmen erhält man nach der obigen Reihe (V):

$$A.\log.(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\frac{z^5}{5}-\frac{z^6}{6}+\text{etc.}$$

wenn nämlich $\alpha+\beta+\gamma+\delta..+\varphi=n$;

und $p=\frac{n.n-1.n-2.n-3.....3.2.1.}{(1.2..\alpha)(1.2..\beta)(1.2..\gamma)(1.2..\delta)(1.2..\varphi)}$ §

denn nach dem Begriffe der Multiplication n gleicher Factoren $(a+b+c+d....+f)$ bildet das Product sich durch alle mögliche Zusammenstellungen von n Elementen aus den gegebenen Reihen, so daß die Exponentensummen in jedem Gliede der Entwickelung $=n$ seyn, und die zugehörige Permutationszahl ihm hinzugefügt werden muß. Bezeichnet man kürzer die Producte der natürlichen Zahlenreihen $(1.2..n)$, $(1.2..\alpha)$,.. durch n^x α^x, u. s. w., so ist der summatorische Ausdruck eines Polynomiums der vorliegenden Art:

$$(a+b+c+d+....+f)^n=\int\frac{n'}{\alpha'.\beta'.\gamma'.\delta'..\varphi'}\,a.\,b.\,c.\,d...f^{\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varphi}$$

unter der Bedingung, daß $\alpha+\beta+\gamma+\delta..\varphi=n$, welches aus der Zahlenreihe von o bis n alle verschiedenen Zusammenstellungen der Summe n gebildet werden müssen, indem man so viele Zahlen verbindet, als Elemente im Polynomium gegeben sind.

Viertes Kapitel.

Die Exponentenreihen.

184. **Exponential- und logar. Reihe.** Wenn im Vorhergehenden für die Reihe des entwickelten Binomiums $(1+x)^n$ der Grundfactor die **Hauptgröße**, der Exponent hingegen als **Nebengröße** deren Coefficienten lieferte, so läßt sich umgekehrt ebensowol eine Entwickelung der Form $(1+z)^x$ denken, deren Glieder nach den Potenzen des **Exponenten** fortschreiten und ihre Coefficienten aus dem Grundfactor gebildet erhalten. Man kann eine solche Entwickelung eine **Exponentialreihe** nennen. Soll aber nicht der Werth der Potenz durch den Exponenten, sondern vielmehr der Werth des letztern, der in diesem Falle (nach §. 127) **Logarithmus** heißt, in Function des Zahlenwerthes der **Potenz** dargestellt werden (so daß $x=f(z)$ entwickelt werde, wenn $(1+a)^x=(1+z)$ ist, so nennt man die Reihe

eine logarithmische. Beide Entwickelungen, die die gegenseitige Bestimmung der Potenz und des Exponenten darstellen sollen, können deshalb füglich mit dem gemeinschaftlichen Namen der Exponentenreihen belegt werden.

185. Exponentialreihe. Die einfachste Form der zu entwickelnden Exponentialgröße $(1+z)^x$ liefert durch Anwendung des binomischen Lehrsatzes die Reihe:

$$1+{}^{x}\mathfrak{B}^{1}z+{}^{x}\mathfrak{B}^{2}z^2+{}^{x}\mathfrak{B}^{3}z^3+{}^{x}\mathfrak{B}^{4}z^4+\ldots\ldots+{}^{x}\mathfrak{B}^{k}z^k\ldots$$

welche bei der völligen Unbestimmtheit des Exponenten als unbegränzt angesehen werden muß. Um ihr die allein gültige Gestalt einer Anordnung nach den Potenzen der Hauptgröße x zu ertheilen, so daß

$$(1+z)^x=1+\overset{1}{A}x+\overset{2}{A}x^2+\overset{3}{A}x^3+\ldots+\overset{k}{A}x^k\ldots$$

entwickelt erscheinen, suche man vor Allem den Coefficienten $\overset{1}{A}$ zu bestimmen. Offenbar wird dieser Coefficient selbst eine unendliche Reihe, da er aus allen Gliedern der obigen Binomial-Entwickelung einen Beitrag erhält; nämlich aus

$${}^{x}\mathfrak{B}^{1}z=x.z.\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ den Beitrag } z.$$

$${}^{x}\mathfrak{B}^{2}z^2=\frac{x.x-1}{1.2}z^2=\frac{z^2}{2}x^2-\frac{z^2}{2}x \text{ den Beitr. } -\frac{z^2}{2}$$

$${}^{x}\mathfrak{B}^{3}z^3=\frac{x.x-1.x-2}{1.2.3}z^3=\frac{z^3}{6}x^3-\frac{z^3}{2}x^2+\frac{z^3}{3}x \text{ d. Beitr. } +\frac{z^3}{3}$$

Allgemein liefert das k^{te} Glied nach dem anfänglichen:

$${}^{x}\mathfrak{B}^{k}z^k=\frac{x.x-1.x-2.\ldots.x-k+1}{1.2.3.\ldots\ldots k}z^k,$$

dessen entwickeltes Product mit $x(-1)(-2)..(-k+1)\frac{z^k}{1.2..k}$ schließen muß, indem man $(-1)(-2)\ldots(-k+1)=(1.2.3\ldots k-1)(-1)^{k-1}$ setzt, als Beitrag zu dem Coefficienten $\overset{1}{A}$ den Theil

$$\frac{(1.2.3\ldots.k-1)(-1)^{k-1}.z^k}{1.2.3.\ldots\ldots k}=(-1)^{k-1}.\frac{z^k}{k},$$

so daß die Reihe, wodurch der Coefficient von x in der Entwickelung von $(1+z)^x$ + gegeben wird, folgende ist:

$$\overset{1}{A} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \ldots (-1)^{k-1}\frac{z^k}{k} \ldots .$$

Die Werthe der folgenden Coefficienten $\overset{2}{A}, \overset{3}{A}, \overset{4}{A}$, etc. ließen sich allerdings auf demselben Wege finden; indessen wird ihre Bestimmung dann viel beschwerlicher seyn, als wenn man sie auf folgende Art recurrirend aus einander abzuleiten sucht.

186. Coefficientenbestimmung. Wenn $(1+z)^x = 1 + \overset{1}{A}x + \overset{2}{A}x + \text{etc.}$ gesetzt wird, so liefert die identische Gleichung $(1+z)^{2x} = (1+z)^x(1+z)^x$ die gleichbedeutende:

$$1 + \overset{1}{A}(2x) + \overset{2}{A}(2x)^2 + \overset{3}{A}(2x)^3 + \text{etc.} = (1 + \overset{1}{A}x + \overset{2}{A}x^2 + \text{etc.})(1 + \overset{1}{A}x + \overset{2}{A}x^2 + \text{etc.})$$

oder wenn die angedeutete Multiplication der beiden Reihen wirklich ausgeführt wird:

$$1 + 2\overset{1}{A}x + 4\overset{2}{A}x^2 + 8\overset{3}{A}x^3 + \text{etc.} = 1 + 2\overset{1}{A}x + \left.\begin{matrix} 2\overset{2}{A} \\ \overset{1}{A}^2 \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} 2\overset{3}{A} \\ 2\overset{1}{A}\overset{2}{A} \end{matrix}\right\} x^3 + \left.\begin{matrix} 2\overset{4}{A} \\ 2\overset{1}{A}\overset{3}{A} \\ \overset{2}{A}^2 \end{matrix}\right\} x^4 + \text{etc.}$$

Die Gültigkeit dieser Gleichung für jeden beliebigen Werth von x leitet zu den Bedingungen:

1) $2\overset{1}{A} = 2\overset{1}{A}$, d. h. der Werth von $\overset{1}{A}$ muß ursprünglich berechnet werden.

2) $4\overset{2}{A} = 2\overset{2}{A} + \overset{1}{A}^2$, also $2\overset{2}{A} = \overset{1}{A}^2$ oder $\ldots\ldots \overset{2}{A} = \frac{\overset{1}{A}^2}{1.2}$

3) $8\overset{3}{A} = 2\overset{3}{A} + 2\overset{1}{A}\overset{2}{A}$, also $6\overset{3}{A} = 2\overset{1}{A}\overset{2}{A}$ oder $\ldots \overset{3}{A} = \frac{\overset{1}{A}^3}{1.2.3}$

4) $16\overset{4}{A} = 2\overset{4}{A} + \overset{1}{A}\overset{2}{A} + \overset{2}{A}^2$, also $14\overset{4}{A} = \overset{1}{A}\overset{3}{A} + \overset{2}{A}^2$

$$\text{oder} \ldots \overset{4}{A} = \frac{\overset{1}{A}^4}{1.2.3.4}$$

wonach der Coefficient des k^{ten} Gliedes nach dem anfänglichen

in der Exponentialreihe, $\overset{k}{A} = \frac{\overset{1}{A^k}}{1.2..k}$ seyn wird. Demnach ist die gesuchte Entwickelung:

$$\text{I. } (1+z)^x = 1+\overset{1}{A}x+\frac{\overset{1}{A^2}}{1.2}x^2+\frac{A^3}{1.2.3}x^3+\frac{A^4}{1.2.3.4}x^4..$$
$$+\frac{A^k}{1.2...k}x^k....$$

der, in Function von z bestimmte Werth des ersten Coefficienten aber nach dem Vorhergehenden:

$$\text{II. } A = z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\frac{z^5}{5}-....(-1)^k.\frac{z^k}{k}...$$

187. Exponential-Modulus: Dieser erste Coefficient in der Exponentialreihe, der sich nicht ändert, so lange in der Potenz $(1+z)^x$ die Basis $(1+z)$ die nämliche bleibt, welche Werthe man auch dem Exponenten ertheilen möge, und von dem alle folgenden Coefficienten nach einem sehr einfachen Gesetze bestimmt werden, heißt der Modulus eines Potenzensystems von Zahlen, die nach der Reihe (I) berechnet sind. Er bildet offenbar nur dann eine convergirende Reihe, wenn z die Einheit nicht übersteigt oder die Basis $(1+z)$ zwischen 1 und 2 fällt, so daß es scheint, als ob die obige Entwickelung der Exponentialgröße nur unter großer Einschränkung brauchbar sey. Sie wird aber, wenn man den Modulus $A=1$ setzt, wofür die Basis einen besondern Werth erhalten muß, den man mit e zu bezeichnen pflegt:

$$\text{III. } e^x = 1+x+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+..+\frac{x^k}{1.2..k}$$

und diese einfachste Exponentialreihe ist die Grundform des sogenannten natürlichen Potenzensystems. Um dessen Basis zu finden, welches durch die Gleichung $1=z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3-\frac{1}{4}z^4+$ etc. nicht geschehen kann, setzt man in der Exponentialreihe zugleich $A=1$ und $x=1$, also daß

$$(1+z)^x = 1+Ax+\frac{A^2x^2}{1.2}+\frac{A^3x^3}{1.2.3}+\frac{A^4x^4}{1.2.3.4}+\text{etc.}$$

sich in $e=1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3.}+\frac{1}{1.2.3.4}+$ etc.
$= 2{,}7182818...$

verwandelt. Dieſe irrationale Zahl, dem Gebrauche gemäß kürzer durch e angedeutet, iſt mithin die Grundzahl des natürlichen Syſtems, welches wegen der ſteten Convergenz ſeiner Grundform (III.), welchen Werth man auch für x anſetzen möge, vor allen andern brauchbar erſcheint. Um aber von dem bereits berechneten natürlichen Potenzenſyſteme zu einem andern überzugehen, deſſen Baſis = b iſt, darf man nur unter den verſchiedenen Potenzen von e den Werth von $b = e^{\beta}$ ſuchen, wodurch β gefunden wird, oder $\beta = \log. b$ ſetzen: dann iſt

$$b^x = e^{(\beta x)} = 1 + (\beta x) + \frac{(\beta x)^2}{1.2} + \frac{(\beta x)^3}{1.2.3} + \frac{(\beta x)^4}{1.2.3.4} + \frac{(\beta x)^k}{1.2..k} \cdots$$

oder IV. $$b^x = 1 + \log. b. x + \frac{(\log. b. x)^2}{1.2} + \frac{(\log. b. x)^3}{1.2.3} \cdots + \frac{(\log. b. x)^k}{1.2 \ldots k} \cdots$$

188. Logarithmiſche Reihe. Wenn nicht die Entwickelung der Potenz in Function des Exponenten, ſondern umgekehrt die Beſtimmung des Exponenten (oder Logarithmus) aus dem Werthe der Potenz gefordert wird, ſo iſt allgemein in dem Ausdrucke $(1+a)^x = 1+z$ der Werth von x in Function von z darzuſtellen, wobei die Baſis $(1+a)$ nur die Coefficienten zu dieſer Entwickelung liefern kann. Die Form der logarithmiſchen Reihe ſey nun, weil für $z = o$ ebenfalls $\log. (1+z) = o$ iſt:

$$\text{Log.}(1+z) = {}^{1}Az + {}^{2}Az^2 + {}^{3}Az^3 + {}^{4}Az^4 + \ldots + {}^{k}Az^k \ldots$$

ſo entſteht durch Verdoppelnng der Hauptgröße die Gleichung:

$$\text{Log.}(1+2z) = 2\,{}^{1}Az + 2^2\,{}^{2}Az^2 + 2^3\,{}^{3}Az^3 + 2^4\,{}^{4}Az^4 \ldots\ldots + 2^k\,{}^{k}Az^k \ldots$$

Vermöge dieſer beiden Reihen erhält man für den Ausdruck:

$$\text{Log.}(1+2z) - \text{Log.}(1+z) + \text{Log.}\left(\frac{1+2z}{1+z}\right) \text{ oder Log.} \left(1 + \frac{z}{1+z}\right)$$

doppelte Formen der Entwickelung, durch deren Gleichsetzung die Coefficienten $\overset{1}{A}, \overset{2}{A}, \overset{3}{A} \ldots$ ausgemittelt werden können.

189. Coefficientenbestimmung. Nach der oben zum Grunde gelegten Form der logarithmischen Reihe, worin die Coefficienten unbestimmt angedeutet, aber für alle beliebigen Werthe der Hauptgröße z immer die nämlichen sind, hat man:

$$\log.\left(1+\frac{z}{1+z}\right) = \overset{1}{A}\left(\frac{z}{1+z}\right) + \overset{2}{A}\left(\frac{z}{1+z}\right)^2 + \overset{3}{A}\left(\frac{z}{1+z}\right)^3 + \overset{4}{A}\left(\frac{z}{1+z}\right)^4 + \text{etc.}$$

und da durch wirklich ausgeführte Division:

$$\frac{\overset{1}{A}z}{1+z} = \overset{1}{A}z - \overset{1}{A}z^2 + \overset{1}{A}z^3 - \overset{1}{A}z^4 + \overset{1}{A}z^5 - \overset{1}{A}z^6 \ldots.$$

$$\frac{\overset{2}{A}z^2}{(1+z)^2} = \frac{\overset{2}{A}z^2}{1+2z+z^2} = \overset{2}{A}z^2 - 2\overset{2}{A}z^3 + 3\overset{2}{A}z^4 - 4\overset{2}{A}z^5 \ldots$$

$$\frac{\overset{3}{A}z^3}{(1+z)^3} = \frac{\overset{3}{A}z^3}{1+3z+3z^2+z^3} = \overset{3}{A}z^3 - 3\overset{3}{A}z^4 + 4\overset{3}{A}z^5 \ldots.$$

$$\frac{\overset{4}{A}z^4}{(1+z)^4} = \frac{\overset{4}{A}z^4}{1+4z+6z^2+4z^3+z^4} = \overset{4}{A}z^4 - 4\overset{4}{A}z^5 \ldots..$$

gefunden wird, so ist nach den Potenzen von z entwickelt:

$$\log.\left(1+\frac{z}{1+z}\right) = \left.\begin{matrix}\overset{1}{A}z - \overset{1}{A} \\ + \overset{2}{A}\end{matrix}\right\} z^2 \left.\begin{matrix}+\overset{1}{A} \\ -2\overset{2}{A} \\ +\overset{3}{A}\end{matrix}\right\} z^3 \left.\begin{matrix}-\overset{1}{A} \\ +3\overset{2}{A} \\ -3\overset{3}{A} \\ +\overset{4}{A}\end{matrix}\right\} z^4$$

$$\left.\begin{matrix}+\overset{1}{A} \\ -4\overset{2}{A} \\ +6\overset{3}{A} \\ -4\overset{4}{A} \\ +\overset{5}{A}\end{matrix}\right\} z^5 - \text{etc.}$$

Ferner darf man, um einen andern Werth desselben Ausdrucks zu erhalten, nur die oben für log. (1+z) und log. (1+2z) gesetzten Reihen von einander subtrahiren, und erhält:

$$\log.\left(\frac{1+2z}{1+z}\right) = (2-1)\overset{1}{A}z+(4-1)\overset{2}{A}z^2+(8-1)\overset{3}{A}z^3 + (16-1)\overset{4}{A}z^4 + \text{etc.}$$

Da nun diese beiden Reihen als zwiefache Entwickelungen derselben Größe übereinstimmen müssen, welche Werthe auch für z gesetzt werden mögen, was aber durch die Identität der Coefficienten gleichhoher Potenzen von z möglich ist, so erhält man für die unbestimmt angedeuteten Coefficienten $\overset{1}{A}, \overset{2}{A}, \overset{3}{A}\ldots$ der logarithmischen Reihe in die Bedingungsgleichungen:

1) $\overset{1}{A} = \overset{1}{A}$, d. h. der Werth von $\overset{1}{A}$ muß ursprünglich bestimmt werden.

2) $3\overset{2}{A} = -\overset{1}{A}+\overset{2}{A}$, also $2\overset{2}{A} = -\overset{1}{A}$ oder $\overset{2}{A} = -\frac{\overset{1}{A}}{2}$

3) $7\overset{3}{A} = \overset{1}{A}-2\overset{2}{A}+\overset{3}{A}$, also $6\overset{3}{A} = \overset{1}{A}-2\overset{2}{A}$, ob. $\overset{3}{A} = +\frac{\overset{1}{A}}{3}$

4) $15\overset{4}{A} = -\overset{1}{A}+3\overset{2}{A}-3\overset{3}{A}+\overset{4}{A}$, also $\overset{4}{A} = -\frac{\overset{1}{A}}{4}$

wonach der Coefficient des k^{ten} Gliedes nach dem anfänglichen in der Reihe $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\overset{k}{A} = \pm\frac{\overset{1}{A}}{k}$ gesetzt werden darf. Dadurch ist nun die Entwickelung eines Logarithmus in Function der Potenz gefunden als:

$$\text{V. } \log.(1+z) = \overset{1}{A}\left(z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\frac{z^5}{5}\ldots. \pm\frac{z^k}{k}\ldots\right)$$

190. Logar. Modulus. Wird der von der Grundzahl b oder (1+a) des Systems abhängige Coefficient $\overset{1}{A}$, den man den logarithmischen Modulus nennt, = 1

angenommen, so erkennt man in der einfachen Reihe $(z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3-\frac{1}{4}z^4+$ etc.) den Ausdruck des Exponential-modulus wieder, dessen Zahlenwerth (nach §. 187) dann $=1$ wurde, wenn man $(1+z)=e$ oder 2,7182818.. setzte. Folglich zieht sich die Form

$$(1+a)^x \text{ oder } (1+a)^{\frac{1}{A}(z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\text{etc.})} = (1+z)$$

wenn man den Exponenten $x=1$ und $(1+z)=e$ setzt, zusammen auf den Ausdruck $(1+a)=e$. Für diesen Werth der Basis können die Logarithmen am einfachsten berechnet und deshalb zur Unterscheidung von andern natürliche Logarithmen genannt werden. Allgemein findet man nun den log. Modulus für eine beliebige Basis b oder $(1+a)$ auf folgende Art. Es ist, weil $(1+a)^x=(1+z)$, auch $x.\log.(1+a)=\log.(1+z)$ oder wenn man für x seinen Werth $\frac{1}{A}(z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+$ etc.) setzt:

$$\frac{1}{A}(z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\text{etc.}).\log.(1+a)=\log.(1+z)$$

und wenn in diesem Ausdrucke für $(1+z)$ der besondere Zahlenwerth e substituirt und damit $(z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-$ etc.) $=1$ gesetzt wird:

$$\frac{1}{A}.\log.(1+a)=\log.e, \text{ also } \frac{1}{A}=\frac{\log.e}{\log.(1+a)}=\frac{1}{\log.(1+a)},$$

d. h. der Modulus eines logarithmischen Systems ist der Quotient der Einheit, durch den natürlichen Logarithmus seiner Basis dividirt. —

191. Logarithmenberechnung. Für die wirkliche Berechnung der natürlichen Logarithmen erhält man nach der obigen Reihe (V):

$$A.\log.(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\frac{z^5}{5}-\frac{z^6}{6}+\text{etc.}$$

$$\text{B. } \log.(1-z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} - \frac{z^5}{5} - \frac{z^6}{6} - \text{etc.}$$

und durch Subtraction der zweiten von der ersten:

$$\text{C. } \log.\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 2\left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} + \text{etc.}\right)$$

oder, wenn man $\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = y$, also $z = \left(\frac{y-1}{y+1}\right)$ setzt:

$$\text{D. } \log. y = 2\left\{\left(\frac{y-1}{y+1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^5 + \text{etc.}\right\}$$

Hiernach wird z. B. der log. 2 des natürlichen Systems gefunden durch die Reihe:

$$\log. 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \frac{1}{7.3^7} + \text{etc.}\right) = 0{,}6931472\ldots$$

Eben so berechnet man log. 3 = 1,0986123 und log. 5 = 1,6094379, woraus nach der Formel log (a. b) = log. a + log. b sehr leicht die Logarithmen der Zahlen 4, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24 u. s. w. durch Addition gefunden werden.

Um aber aus dem berechneten Logarithmus einer Zahl denjenigen der nächsthöheren ableiten zu können, setze man in (A) $z = \frac{1}{y}$, also

$$\log.\left(\frac{y+1}{y}\right) \text{ oder } \log.(y+1) - \log. y = \frac{1}{y} - \frac{1}{2y^2} + \frac{1}{3y^3} - \frac{1}{4y^4} + \text{etc.}$$

$$\text{oder E. } \log.(y+1) = \log. y + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{2y^2} + \frac{1}{3y^3} - \frac{1}{4y^4} + \text{etc.}\right)$$

Hiernach ist $\log. 11 = \log. 10 + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{200} + \frac{1}{3000} - \frac{1}{40000} + \text{etc.}\right) = 2{,}3978953.$

Auf gleiche Weise findet sich durch Substitution von $z = \frac{1}{y}$ in (B) die Formel

$$\log.\left(\frac{y-1}{y}\right) \text{ oder } \log.(y-1) - \log. y = -\frac{1}{y} - \frac{1}{2y^2} - \frac{1}{3y^3} - \frac{1}{4y^4} - \text{etc.}$$

oder F. $\log.(y-1) = \log. y - \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{2y^2} + \frac{1}{3y^3} + \frac{1}{4y^4} + \text{etc.}\right)$

Endlich ergiebt sich durch Verbindung dieser beiden Formeln die neue:

$$\text{G. } \log. y = \frac{1}{2}\log.(y+1) + \frac{1}{2}\log.(y-1) + \left(\frac{1}{2y^2} + \frac{1}{4y^4} + \frac{1}{6y^6} + \text{etc.}\right)$$

wonach die Berechnung der Logarithmen für Primzahlen aus denen die benachbarten $(y+1)$ und $(y-1)$ vorgenommen werden kann.

192. **Künstliche Logarithmen.** Wird nicht die Zahl e, sondern irgend eine andere b zur Basis eines Potenzensystems gewählt, so nennt man die Logarithmen eines solchen zur Unterscheidung künstliche und deutet beide Arten von Logarithmen am zweckmäßigsten durch ${}^{c}\log. y$ und ${}^{b}\log. y$ an, wenn man sich nicht etwa durchaus auf ein einziges Potenzensystem bezieht und dadurch die Andeutung der Basis überflüssig macht. Da nun durch die Mulitplication mit dem log. Modulus $A = \frac{1}{\log. b}$ (nach §. 189 und 190) die natürlichen Logarithmen in künstliche verwandelt werden, so lassen sich auch diese nach den obigen Formeln berechnen, wenn man ihnen nur den Modulus als Factor beifügt. Für das gemeine oder briggische Potenzensystem, als dessen Basis 10 angenommen ist, gilt somit allgemein:

$${}^{10}\log.(1+z) = \frac{1}{{}^{c}\log. 10} \cdot {}^{c}\log.(1+z) = \frac{{}^{c}\log.(1+z)}{{}^{c}\log. 10.}$$

So ist z. B., weil $\frac{1}{\text{log. } 10} = 0{,}4342945$ gefunden wird;

$$^{10}\log. 2 = 0{,}4342945 \,.\, 0{,}6931471 = 0{,}3010300.$$
$$^{10}\log. 5 = 0{,}4342945 \,.\, 1{,}6094379 = 0{,}6989700.$$

und aus den, auf diese Weise mittelbar aus den natürlichen berechneten, künstlichen Logarithmen einzelner Primzahlen finden sich durch Addition diejenigen ihrer Zusammensetzungen sehr einfach.

193. Imaginäre Exponenten. Wird in der Exponentialreihe des natürlichen Potenzensystems

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

dem Exponenten x der imaginäre Factor $\sqrt{-1}$ oder i hinzugefügt, so theilt die Entwickelung sich in die beiden Reihen

$$1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1\ldots6} + \frac{x^8}{1\ldots8} - \text{etc.}$$

und $\left(x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1\ldots5} - \frac{x^7}{1\ldots7} + \frac{x^9}{1\ldots9} - \text{etc.}\right) i$

Bezeichnet man diese stets convergirenden Reihen als eigenthümliche Functionen der Größe x durch die Benennungen: Cosinus x und Sinus x, so ist kürzer:

$$\text{I.} \quad e^{xi} = \cos. x + \sin. x.i$$

Setzt man $-xi$ statt xi, so bleibt die Reihe des Cosinus unverändert, während diejenige des Sinnes ihre Vorzeichen ändert; also

$$\text{II.} \quad e^{-xi} = \cos. x - \sin. x.i$$

Wird $x = n.z$ gesetzt, so folgt aus $e^{(nz)i} = \cos. (nz) + \sin. (nz)i$ und $e^{nzi} = (e^{zi})^n = (\cos. z + \sin. z.i)^n$, daß

$$\text{III.} \quad (\cos. z + \sin. z.i)^n = \cos. (nz) + \sin. (nz)\, i.$$

Ferner findet man durch Addition und Subtraction von I. und II. für die, mit dem Namen Sinus und Cosinus bezeichneten, Functionen die geschlossenen Ausdrücke:

$$\text{IV.} \quad \cos. x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}$$

$$\text{V.} \quad \sin. x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}$$

Werden hingegen die Formeln I. und II. multiplicirt, so ergiebt sich ein sehr einfacher Zusammenhang zwischen Cosinus und Sinus in dem Ausdrucke

$$\text{VI.} \quad 1 = \cos.x^2 + \sin.x^2,$$

wonach $\sin.x = \sqrt{1-\cos.x^2}$ und $\cos.x = \sqrt{1-\sin.x^2}$, also $\sin.x = \pm 1$ für $\cos.x = 0$, und $\cos.x = \pm 1$ für $\sin.x = 0$ gefunden wird.

Um den Werth von x in Function seines Sinus oder Cosinus auszudrücken, ziehe man aus I. und II. die Gleichungen

$$xi \log.e = \log.(\cos.x + \sin.x.i)$$
$$-xi \log.e = \log.(\cos.x - \sin.x.i)$$

und aus diesen durch Subtraction, weil $\log. e = 1$:

$$x = \frac{1}{2i} \log. \left(\frac{\cos.x + \sin.x.i.}{\cos.x - \sin.x.i.}\right)$$

Will man diese Form im Zähler und Nenner mit cos. x dividiren und den Quotienten $\frac{\sin.x}{\cos.x}$ kürzer durch tangens x bezeichnen, so wird sie:

$$x = \frac{1}{2i} \log. \left(\frac{1+\text{tang.}x.i}{1-\text{tang.}x.i}\right)$$

Die Entwickelung dieses Ausdrucks ist aber (nach §. 191. C)

$$x = \frac{1}{2i} \cdot 2i \left(\text{tang.}x - \frac{\text{tang.}x^3}{3} + \frac{\text{tang.}x^5}{5} - \text{etc.}\right)$$

worin die imaginären Größen einander aufheben und tang. x willkührlich als Function des Cosinus oder Sinus, nämlich $= \frac{\sqrt{1-\cos.x^2}}{\cos.x}$ oder $\frac{\sin.x}{\sqrt{1-\sin.x^2}}$ betrachtet werden kann.

194. Tafeln für Sinus und Cosinus. Die Benennungen sin. x und cos. x der obigen Reihen rühren davon her, daß für sie in geometrischer Bedeutung die nämlichen Formeln der Entwickelung gefunden werden, so daß der schon vorhandene Name für diese besondern Functionen, jedoch nur in arithmetischer Bedeutung, von der Analysis beibehalten wird. Diese kann also die von der Trigonometrie berechneten Tafeln benutzen, um Werthe der Form e^{xi} darzustellen, indem man nur die Zahlen für den Ausdruck $e^{xi} =$

cos. x + sin. x.i aus jenen Tafeln zu entlehnen braucht. Nur wird man, da die Tafeln sich auf die Winkeltheilung des Kreises beziehen und in den Reihen des Sinus und Cosinus unter x die Länge des zugehörigen Bogens verstanden wird, bei dem Aufsuchen jener Functionen hierauf Rücksicht nehmen, und zuvor den Winkel nach der Proportion $w° : x = 260° : 3{,}14159..$ aus dem gegebenen Bogen berechnen müssen.

Fünftes Kapitel.

Die Auflösung der Gleichungen.

195. Algebra. Die Aufgabe der allgemeinen Arithmetik, für die Hauptgröße einer Reihe von der Form $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} \ldots + Gx + K$ diejenigen Werthe aufzufinden, die dem gegebenen der ganzen Reihe entsprechen, führt in ihrem ganzen Umfange auf so viele Schwierigkeiten und weitläufige Untersuchungen, daß man dieselben unter dem Namen Algebra, abgesondert zu behandeln pflegt. Und da es bis jetzt zu den vergeblichen Bemühungen der Wissenschaft gehört, jene Aufgabe allgemein zu lösen, nämlich die Wurzeln, d. h. die genügenden Werthe von x für jede beliebige Gleichung der Form

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} \ldots + Gx + K = L$$

in Function der gegebenen Coefficienten A, B, C.. durch arithmetische Ausdrücke darzustellen, oder eine solche Gleichung so aufzulösen, daß die einzelnen Werthe von x, wie es bei quadratischen Gleichungen (§. 103) möglich war, in Buchstabenformeln gefunden werden, die auf jeden speciellen Fall angewendet werden können, so ist man genöthigt, die Aufgabe auf numerische Gleichungen, d. h, solche, deren Coefficienten in bestimmten (dekadischen) Zahlen gegeben sind, zu beschränken. Doch lassen sich über Bildung, Zerlegung und gewisse Eigenschaften der Gleichungen allgemeine Sätze aufstellen, die jeder Auflösung zur Vorbereitung dienen.

196. Form der Gleichungen. Jede Gleichung, als eine Reihe von Gliedern, die nach den Potenzen einer

Hauptgröße fortschreitet, aber einen bestimmten Werth hat, fällt unter die Form

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} \ldots\ldots + gx + k = 1$$

oder wenn man durchgehends mit a dividirt und 1 transponirt, unter das einfachere Schema

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} \ldots\ldots + Gx + K = o$$

worin der Coefficient der höchsten Potenz von x die Einheit, jedes anderen Gliedes aber irgend eine positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl oder auch Null ist. Der Exponent n bestimmt den Grad der Gleichnng, nachdem man derselben die vorstehende gesetzmäßige Form gegeben hat. So ist $7x^3 + \frac{3}{x} - 5 - 3x + \frac{70}{x^2} = o$ als identisch mit $7x^5 + 3x - 5x^2 - 3x^3 + 70 = o$ oder $x^5 - \frac{3}{7}x^3 - \frac{5}{7}x^2 + \frac{3}{7}x + 10 = o$ eine Gleichung des fünften Grades.

197. Bildung aus Binomialfactoren. Das Product mehrerer Binomialfactoren der Form $(x+a)(x+b)\ldots(x+k)$ entwickelt sich (nach §. 172) in der Reihe

$$x^n + \overset{1}{C}x^{n-1} + \overset{2}{C}x^{n-2} + \overset{3}{C}x^{n-3} \ldots\ldots + \overset{n-1}{C}x + \overset{n}{C},$$

worin die Coefficienten combinatorisch aus den Elementen a, b, c .. entstanden sind. Diese Reihe wird offenbar $= o$, wenn irgend einer ihrer Factoren $= o$, oder wenn $x = -a, -b, \ldots\ldots - k$ gesetzt wird. Ist hingegen $x = +a, +b, \ldots + k$ oder $x - a = o$, $x - b = o \ldots (x - k) = o$, so entspringt aus der Multiplication dieser Factoren die Reihe

$$x^n - \overset{1}{C}x^{n-1} + \overset{2}{C}x^{n-2} - \overset{3}{C}x^{n-3} \ldots\ldots \pm \overset{n-1}{C}x \mp \overset{n}{C}.$$

weil hier die Elemente negative Zahlen sind. Man darf also die Coefficienten jeder Gleichung unter der Voraussetzung, sie sey aus der Multiplication von Binomialfactoren entstanden, als Combinationen ihrer Wurzeln betrachten, die in den ungeraden Gliedern der Reihe mit entgegengesetzten Zeichen genommen sind. So bildet sich aus $(x-2)(x-3)(x-5)$ die Gleichung $x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = o$, worin $-10 = -\overset{1}{C}(2, 3, 5)$; $31 = +\overset{2}{C}(2, 3, 5)$ und $-30 = -\overset{3}{C}(2,3,5)$ ist; ferner aus $(x+2)(x+3)(x+5)$ die Gleichung

$x^3+10x^2+31x+30=0$, worin $+10=-\overset{1}{C}(-2,\ 3,\ -5)$, $31=+\overset{2}{C}(-2,-3,\ -5)$ und $+30=-\overset{3}{C}(-2,-3,-5)$ gefunden wird.

198. Zerlegung in Binomialfactoren. Daß eine jede Gleichung der Form $x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}\ldots\ldots+Gx+K=0$, wenn a, b, c, ... k ihre Wurzeln ſind, in die Factoren $(x-a)(x-b)(x-c)..(x-k)$ zerlegt werden können, beweiſt man durch Subſtitution einer Wurzel a für x und Einführung des dadurch gewonnenen Werthes

$$K=-a^n-Aa^{n-1}-Ba^{n-2}-Ca^{n-3}\ldots.-Ga$$

Denn dadurch erſcheint die gegebene Gleichung unter der Form

$$(x^n-a^n)+A(x^{n-1}-a^{n-1})+B(x^{n-2}-a^{n-2})+\ldots G(x-a)=0$$

und folglich (nach §. 51) in allen Gliedern durch $(x-a)$ diviſibel. Da nun der Quotient um 1 niedriger im Range, und wenn b Wurzel deſſelben iſt, aus dem nämlichen Grunde durch $(x-b)$ diviſibel ſeyn muß, ſo folgt, daß die Gleichung durch allmählige Diviſion in eine Reihe von Binomialfactoren zerlegt werden könne.

199. Anzahl der Wurzeln. Soll aber eine Gleichung als ein, aus Binomialfactoren entſtandenes oder in dieſelben zerlegbares Product angeſehen werden, ſo iſt man genöthigt, jener Factoren, mithin auch der Wurzeln, ſo viele anzunehmen, als der Exponent der höchſten Potenz der Hauptgröße, d. h. der Rang der Gleichung Einheiten enthält. So hat die cubiſche Gleichung $x^3-18x^2-128x+480=0$ zerlegbar in die Factoren $(x-10)$, $(x-12)$ und $(x+4)$ die drei Wurzeln $x=10$, 12 und -4; die biquadratiſche $x^4+2x^3-41x^2-42x+360=0$, als Product der Factoren $(x-3)$, $(x-5)$, $(x+4)$ und $(x+6)$, die vier Wurzeln $x=3$, 5, -4 und -6.

200. Poſitive und negative Wurzeln. Sind alle Wurzeln einer Gleichung poſitiv, alſo $x=a$, $x=b$, $x=c$,.. oder $(x-a)=0$, $(x-b)=0$, $(x-c)=0$, ... ſo wechſeln (nach §. 197) die Zeichen der Glieder des entwickelten Productes regelmäßig ab; ſind die Wurzeln aber alle negativ, ſo erhalten ſämmtliche Glieder die poſitive Vorzeichnung. Sind unter den Wurzeln der Gleichung zugleich poſitive und negative

Zahlen, so kann die Bezeichnung ihrer Glieder auf die mannigfaltigste Weise abwechseln. Ob die Summe der positiven oder der negativen Wurzeln überwiege, ist aus dem ersten Coefficienten A und ob die Anzahl der negativen Wurzeln gerade oder ungerade sey, aus dem absoluten (d. h. von x freien) Gliede K der Gleichung leicht erkennbar. Denn A ist die Summe aller Wurzeln mit entgegengesetztem Zeichen: $A = -\overset{1}{C}(a, b, c \ldots k)$; und K ist das Product sämmtlicher Wurzeln: $K = +\overset{k}{C}(a, b, c \ldots k)$; folglich deutet in obigen Beispielen (§. 199) $A = -18$ auf die größere Summe der positiven, $A = +2$ hingegen der negativen Wurzeln; und $K = +480$ und $+360$ auf eine gerade Menge negativer Wurzeln in beiden Gleichungen:

201. Anzahl positiver und negativer Wurzeln. Eine Gleichung kann nie mehr positive Wurzeln, als Abwechselungen $(+-, -+)$ und nie mehr negative Wurzeln, als Folgen der Zeichen $(++, --)$ haben. Denn wenn man die allgemeinste Form einer Gleichung

$$(I)\quad x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} \ldots\ldots + Gx + K = 0$$

worin die Coefficienten A, B, C ... K positive oder negative Zahlenwerthe seyn mögen, durch den Factor $(x-a)=0$ multiplicirt, so ist das Product:

$$(II)\quad \left\{\begin{matrix} x^{n+1} + Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} \ldots\ldots + Kx \\ -ax^n - aAx^{n-1} - aBx^{n-2} \ldots\ldots - aGx - aK \end{matrix}\right\} = 0$$

Die Bezeichnung der Coefficienten dieser neuen Gleichung hängt offenbar von dem Werthe ihrer beiden Theile ab und bleibt so lange die der Gleichung (I.), als man nicht genöthigt ist, in (II) wegen des überwiegenden zweiten Theils das Zeichen eines Gliedes der obern Reihe zu verlassen und zu dem des untenstehenden überzugehen. Dieß kann aber nur da der Fall seyn, wo in der oberen Reihe oder der Gleichung (I) eine Zeichenfolge ist, weil sonst der zweite Theil eines Coefficienten nicht dem ersten widerstreitend werden könnte. Sollte man nun mehrere Mal von den Zeichen der einen zu denen der andern Reihe übergehen müssen, oder auch fortwährend die der obern beibehalten, so kommt man wegen des Schlußgliedes $-aK$ jedenfalls doch einmal (mehr) auf ein

widerstreitendes Zeichen der untern Reihe, so daß mindestens eine Abwechselung aus einer Folge der Zeichen entstanden seyn muß.

Wird hingegen die Gleichung (I) mit dem Factor $x+a=o$ multiplicirt, so ist das Product:

$$(III)\quad \left\{\begin{matrix} x^{n+1}+Ax^n+Bx^{n-1}+Cx^{n-2},\ldots.+Kx \\ +ax^n+aAx^{n-1}+aBx^{n-2}\ldots.+aGx+aK \end{matrix}\right\}=o$$

In dieser neuen Gleichung kann man nur da von den Zeichen der obern zu denen der untern Reihe übergehen genöthigt werden, wo in der obern oder in (I) eine Zeichenabwechselung enthalten ist, weil nur in diesem Falle der zweite Theil des Coefficienten dem ersten widerstreitend wird. Ist er dann überwiegend, so entsteht aus der Abwechselung in (I) eine Folge der Zeichen in (III), und so oft man auch hinsichtlich der Zeichen der neuen Coeffieienten von der einen zur andern übergehen, oder so lange man auch bei denen der obern bleiben möge; immer wird man wegen des gleichbezeichneten Schlußgliedes K wenigstens eine neue Folge durch die Multiplication mit $x+a$ erhalten haben.

Da nun eine Gleichung vom n^{ten} Grade n Wurzeln und wegen ihrer $(n+1)$ Glieder eben so viele Combinationen je zwei successiver Zeichen enthält, zu denen durch Multiplication mit dem Factor $x-a=o$ oder Einführung der positiven Wurzel $x=a$ eine Abwechselung durch Multiplication mit $x+a=o$ oder Einführung der negativen Wurzel $x=-a$ hingegen eine Folge der Zeichen hinzukommt, so können in ihr, sofern wie sie als entstanden aus Factoren der Form $(a\pm x)$ betrachten, nicht mehr positive Wurzeln als Abwechselungen und nicht mehr negative, als Folgen der Zeichen enthalten seyn. Man würde sogar behaupten dürfen, daß die Anzahl der positiven Wurzeln mit der der Abwechselungen, die der negativen mit der der Folgen einerlei seyn müsse, wenn die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung einen reellen Zahlenwerth hätten.

202. Imaginäre Wurzeln. Es können aber unter den Wurzeln einer Gleichung auch imaginäre der Form $(a\pm b\sqrt{-1})$ oder $(a\pm bi)$ vorkommen, wie sie bei den quadratischen Gleichungen $x^2+gx+k=o$ sich dann ergeben,

wenn im Ausdrucke der beiden Wurzeln $x = -\frac{1}{2}(g \pm \sqrt{g^2 - 4k^2})$ der Werth von $2k > g$ sein sollte, (§. 104. A. 4). Die imaginäre Wurzel $a+bi$ setzt aber zugleich die andere $a-bi$ in der Gleichung voraus, weil nur durch das Dasein beider die imaginären Größen sich gegenseitig aufheben können. Denn ist $x = a+bi$ oder $x-a-bi = o$, und $x = a-bi$ oder $x-a+bi = o$, so erhält man durch Multiplication dieser trinomischen Factoren das Product

$$(x-a)^2 + b^2 \text{ oder auch } x^2 - 2ax + (a^2 + b^2) = o,$$

worin keine Spur des imaginären Theils der Wurzel zu entdecken ist. Es sind also unmögliche Wurzeln immer paarweise in einer Gleichung vorhanden und die einfachen können in trinomische reelle Factoren des zweiten Grades zusammengefaßt werden. So enthält die Gleichung $x^6 + 4x^5 + 2x^6 + 20x^3 + 257x^2 - 24x - 260 = o$ die reellen Factoren $x+1$, $x-1$, $x^2+8x+20$, $x^2-4x+13$, wovon die beiden letzten in die einfachen imaginären

$$x+4-2i,\ x+4+2i$$
$$\text{und } x-2-3i,\ x-2+3i$$

zerfallen, folglich die sechs Wurzeln -1, $+1$, $-4+2i$, $-4-2i$, $2+3i$ und $2-3i$.

Die Anwesenheit imaginärer Wurzeln erkennt man gewöhnlich durch die Multiplication der Gleichung mit dem Factor $x+1$ oder $x-1$: entsteht nämlich dadurch im Producte mehr, als eine Folge oder Abwechselung, so kann dieß nur von vorhandenen imaginären Wurzeln herrühren. Doch kann auch ungeachtet derselben die Einführung der neuen positiven oder negativen Wurzel nur eine Abwechselung oder Folge der Zeichen nach sich ziehen, so daß ihr Dasein vermöge jenes Mittels nicht immer erkannt wird. Sollten zwei Glieder einer Gleichung, zwischen denen eines fehlt (oder o zum Coefficienten hat) einstimmig bezeichnet seyn, so befinden sich unter ihren Wurzeln nothwendig imaginäre; denn der Widerspruch der Annahmen $+ox^r$ und $-ax^r$, welche zwei Folgen und zwei Abwechselungen der Zeichen, also zugleich zwei negative und zwei positive Wurzeln geben würden, läßt sich nur dadurch heben, daß imaginäre Wurzeln in der Gleichung enthalten sind. Dahin gehört z. B. die Gleichung $x^3 + 20x - 80 = o$, deren fehlendes zweites Glied als $+ox^2$ und $-ox^2$ betrach-

tet werden kann, und die -4, $2-4i$ und $2+4i$ zu ihren Wurzeln hat.

203. Gränzen der Wurzeln. Die Wurzel einer numerischen oder mit bestimmten Zahlen-Coefficienten gegebenen Gleichung ist derjenige Zahlenwerth, welcher an die Stelle von x gesetzt, die Gleichung $= 0$ macht. Die Substitution benachbarter Zahlenwerthe wird ein höheres oder positives und ein niedrigeres oder negatives Resultat erzeugen, zwischen denen Null als Ergebniß der richtigen Substitution enthalten ist. Man denke sich, um die Allgemeinheit dieses Satzes zu erkennen, die Gleichung $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + x + K = 0$ als Product der Factoren

$$[(x-a)^2+b^2].[(x-c)^2+d^2]\ldots(x-k)(x-l)(x-m)\ldots(x-r),$$

so ist es klar, daß die trinomischen Factoren, welchen Werth man auch für x setzen möge, stets positiv seyn werden, also auf das Zeichen des Totalwerths der Reihe gar keinen Einfluß haben können. Der Binomialfactor $(x-k)$ wird hingegen, wenn mar für x einen höhern Werth ($h > k$) substituirt, ein anderes Zeichen erhalten, als wenn man einen niedrigern Werth ($n < k$) für x an die Stelle setzt, die Wurzel k mag positiv oder negativ seyn. Denkt man sich nun die Factoren nach den abnehmenden Werthen der Wurzeln $k, l, m \ldots r$ angeordnet und n zwischen k und l enthalten, so giebt die Substitution der Werthe h und n, weil beide höher sind, als $l, m \ldots r$, für den nachfolgenden Theil des Products $(x-l)(x-m)\ldots(x-r)$ Resultate des nämlichen Zeichens, und die Abwechselung desselben kann nur von dem Factor $(x-k)$ herrühren, der für $x = h$ und $x = n$ entgegengesetzte Zeichen erhält. Wenn daher der Totalwerth der Reihe für einen Zahlenwerth von x positiv, für einen andern negativ wird, so muß der eine zu hoch, der andere zu niedrig und die eigentliche Wurzel zwischen ihnen enthalten sein, weshalb man jene Zahlenwerthe Gränzen derselben nennen darf. So werden die Totalwerthe (X) der biquadratischen Gleichung $x^4 + 2x^3 - 41x^2 - 42x + 360 = 0$, wenn man successiv $x = 4$ und $x = 2$ setzt, $X_4 = -89$ und $X_2 = +160$; ein Zeichen, daß eine der Wurzeln innerhalb der Gränzen 4 und 2 liege. Wirklich ist sie $= 3$ und $X_3 = 0$.

204. **Begränzung durch Differenzreihen.** Der Ausdruck einer höhern Differenzreihe vom Range x ist (nach §. 147):

$$k + (x-1)\,g + \frac{(x-1)(x-2)}{1.2}\,f \ldots\ldots \frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{1.2.\ldots.n}\,d$$

oder nach den Potenzen von x entwickelt:

$$Mx^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} \ldots\ldots + Gx + K,$$

so daß man jede Gleichung als geordneten Ausdruck (Terminus generalis) einer höhern Differenzreihe ansehen darf, deren Rang mit ihrem Grade übereinstimmt. Die durch Substitution der Zahlenwerthe 0, 1, 2, 3 .... als Totalwerthe einer gegebenen Gleichung berechneten Zahlen $X_0, X_1, X_2 .. X_n$ müssen also eine höhere Differenzreihe bilden, von welcher man (nach §. 147) durch Subtraction zu niedrigeren, und endlich zu einer Reihe gleicher Differenzen hinabsteigen kann. Aus diesem Grunde ist es nur erforderlich, für x so viele successive ganze (oder auch nöthigenfalls gebrochene) Zahlen zu substituiren, als man Glieder bedarf, um zu der letzten Reihe der gleichen Differenzen zu gelangen, weil man dann, von dieser wiederum aufsteigend, die Hauptreihe vor- und rückwärts beliebig zu erweitern vermag. Man hat bei diesem Verfahren nicht einmal nöthig, das höchste Glied der Gleichung von seinem etwaigen Coefficienten zu befreien, wodurch die Rechnung noch einfacher wird. Sei z. B. die Gleichung $9x^4 - 3x^3 - 130x^2 - 17x + 260 = 0$ gegeben, so darf man nur ihre Totalwerthe für $x = 0, +1, -1, +2$ und -2 berechnen, und erhält, von der constanten Differenz 216 zurückgehend, die übrigen so weit, als es erforderlich ist, indem man auf der positiven Seite durch Addition, auf der negativen durch Subtraction zur Hauptreihe emporsteigt. Die Berechnung ist diese:

X_{-4}	X_{-3}	X_{-2}	X_{-1}	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4
+744	−49	(−58	+159	+260	+119	−174)	−313	+224
	−793	−9	(+217	+101	−141	−293)	−139	+537
		+784	+226	(−116	−242	−152)	+154	+676
			−558	−342	(−126	+90)	+306	+522
				+216	+216	(+216)	+216	+216

Die vier Wurzeln der Gleichung fallen demnach zwiſchen die Zahlen -4 und -3, -2 und -1, $+1$ und $+2$, $+3$ und $+4$, womit lediglich ihre Begränzung durch ganze Zahlen ausgemittelt, alſo die eigentliche Beſtimmung nur vorbereitet iſt.

205. Beſtimmung der Wurzeln. Die nähere Berechnung einer Wurzel, wenn man die höchſte Ziffer derſelben bereits entdeckt hat, läßt ſich durch ein, dem Ausziehen der Quadrat- und Cubikwurzel ähnliches Verfahren, ausführen. Man ſubſtituire nämlich in der Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} \ldots\ldots + Gx + K = 0$$

für x die zweitheilige Größe $(y+z)$, ſo entwickeln ihre Glieder ſich in den Reihen

$$x^n = (y+z)^n = y^n + n.y^{n-1}z + \frac{n.n-1}{1.2} y^{n-2}z^2 + \text{etc.}$$

$$Ax^{n-1} = A(y+z)^{n-1} = Ay^{n-1} + (n-1)\,Ay^{n-2}z + \frac{n-1.n-2}{1.2} Ay^{n-3}z^2 + \text{etc.}$$

$$Bx^{n-2} = B(y+z)^{n-2} = By^{n-2} + (n-2)\,By^{n-3}z + \frac{n-2.n-3}{1.2} By^{n-4}z^2 + \text{etc.}$$

u. ſ. w. Bezeichnet man nun, um den Inbegriff dieſer Entwickelungen nach den Potenzen von z ordnen, die Coefficienten derſelben durch $\overset{0}{Y}, \overset{1}{Y}, \overset{2}{Y}$, u. ſ. f., ſo iſt die neue Form der Gleichung:

$$\overset{0}{Y} + \overset{1}{Y}z + \overset{2}{Y}z^2 + \overset{3}{Y}z^3 \ldots\ldots \overset{n}{Y}z^n + K = 0$$

worin

$$\overset{0}{Y} = y^n + Ay^{n-1} + By^{n-2} + Cy^{n-3} + Dy^{n-4} + Ey^{n-5} \ldots$$

$$\overset{1}{Y} = ny^{n-1} + (n-1)\,Ay^{n-2} + (n-2)\,By^{n-3} + (n-3)\,Cy^{n-4} \ldots.$$

$$\overset{2}{Y} = \frac{n.n-1}{1.2} y^{n-2} + \frac{n-1.n-2}{1.2} Ay^{n-3} + \frac{n-2.n-3}{1.2} By^{n-4} \ldots.$$

u. ſ. w. bedeutet. Die Gleichung des 5ten Grades

$$x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$$

wandelt sich z. B. in die gleichbedeutende

$$\overset{0}{Y} + \overset{1}{Y}z + \overset{2}{Y}z^2 + \overset{3}{Y}z^3 + \overset{4}{Y}z^4 + \overset{5}{Y}z^5 + E = 0$$

in $\overset{0}{Y} = y^5 + Ay^4 + By^3 + Cy^2 + Dy$

$\overset{1}{Y} = 5y^4 + 4Ay^3 + 3By^2 + 2Cy + D$

$\overset{2}{Y} = 10y^3 + 6Ay^2 + 3By + C$

$\overset{3}{Y} = 10y^2 + 4Ay + B$

$\overset{4}{Y} = 5y + A$

$\overset{5}{Y} = 1.$

Ist nun bereits der erste Theil y einer Wurzel ausgestelt, so kann man die nächste Ziffer des nachfolgenden eils z dadurch berechnen, daß man das absolute Glied K nsponirt und nun nach Subtraction des Werthes $\overset{0}{Y}$ von $-K$ ersucht, wie vielmal $\overset{1}{Y}$ in den ersten Ziffern des Restes entten sey, ganz so, wie man bei früheren Wurzelausziehungen fuhr. Das Verfahren selbst, seine unvermeidliche Weitigkeit für Gleichungen eines hohen Grades, so wie die rsicht, die man in Ansehung des Ranges der einzelnen lenglieder und ihrer Bezeichnung anzuwenden hat, den durch einige Beispiele am deutlichsten gemacht werden.

206. Auflösung cubischer Gleichungen. Da er den Wurzeln einer Gleichung vom dritten Grade (nach 02) wenigstens eine reelle seyn muß, so wird man diese ch §. 204) immer in die Gränzen ganzer Zahlen einschließen nen. Sei z. B. die Gleichung $x^3 - 9x^2 - 4x + 100 = 0$ eben, die wegen der einen Folge und zwei Abwechselungen Zeichen (nach §. 201) eine negative und zwei positive Wurhaben muß, sofern sie nicht etwa imaginäre enthält, so et sich $X_4 = +4$ und $X_5 = -20$, also eine jener Wurzeln chen 4 und 5. Nun ist die gegebene Gleichung, $(y + z)$ für x tzt, und die Entwickelung, in Beziehung auf z geordnet:

$$\overset{0}{Y} + \overset{1}{Y}z + \overset{2}{Y}z^2 + z^3 + 100 = 0$$

$$(y^3 - 9y^2 - 4y) + (3y^2 - 18y - 4)z + (3y - 9)z^2 + z^3 = -100$$

Den ersten Theil der Wurzel $y = 4$ setzend, findet man dann die folgenden Ziffern successiv, indem man zu dem jedesmal bekannten y ein neues z sucht, wie in folgender Ausführung der Rechnung:

$$\begin{array}{r|l} -100 & 4{,}1452\ldots \\ \hline {}^{0}Y = -96 & \\ \hline (-4000) & \end{array}$$

Nebenrechnungen.

$$\begin{array}{l|l} {}^{1}Yz = -2{,}8 & {}^{1}Y = -28 \;|\; .\ 0{,}1 = -2{,}8 \\ {}^{2}Yz^2 = +0{,}03 & {}^{2}Y = 3 \;|\; .\ 0{,}01 = 0{,}03 \\ z^3 = +0{,}001 & \\ \hline -2{,}769 & \\ \hline (-1{,}231000) & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} {}^{1}Yz = -1{,}0948 & {}^{1}Y = -27{,}37 \;|\; .\ 0{,}04 = -1{,}0948 \\ {}^{2}Yz^2 = +0{,}00528 & {}^{2}Y = 3{,}3 \;|\; .\ 0016 = 0{,}00528 \\ z^3 = +0{,}000064 & \\ \hline -1{,}089456 & \\ \hline (-0{,}141544000) & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} {}^{1}Yz = -0{,}1355060 & {}^{1}Y = -27{,}1012 \;|\; .\ 0{,}005 = 0{,}1355060 \\ {}^{2}Yz^2 = +0{,}00008550 & {}^{2}Y = 3{,}42 \;|\; .\ 0{,}000025 \\ & \qquad = 0{,}0008550 \\ z^3 = +0{,}000000125. & \\ \hline -0{,}135420375 & \\ \hline (-0{,}006123625) & \end{array}$$

Die beiden andern Wurzeln, deren eine zwischen 7 und 8, die andere zwischen -3 und -4 fällt, könnten auf die nämliche Weise berechnet werden. Hat man aber eine reelle Wurzel einer cubischen Gleichung hinlänglich genau bestimmt, so ist es zweckmäßiger, die übrigen beiden, zumal da diese vielleicht imaginär sind, auf nachfolgendem Wege zu bestimmen.

207. Reduction cubischer Gleichungen. Ist für eine Gleichung des dritten Grades, deren Wurzeln mit a, b, c bezeichnet werden mögen, so daß sie (nach §. 197) unter die allgemeine Form

$$x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x = abc$$

fällt, eine Wurzel a bekannt, so hat man dadurch auch die Summe und das Product der beiden noch unbekannten, indem man vom Coefficienten des zweiten Gliedes mit verändertem Zeichen genommen, a subtrahirt und das absolute Glied durch a dividirt. Werde jene mit S, dieses mit P bezeichnet, so finden sich b und c durch Auflösung der beiden Gleichungen $b+c=S$ und $b \cdot c=P$ (nach §. 104 A. 6) ausgedrückt in den Formeln:

$$b = \tfrac{1}{2}(S+\sqrt{S^2-4P})$$
$$c = \tfrac{1}{2}(S-\sqrt{S^2-4P})$$

Ist a eine rationale Zahl, so hätte man kürzer die gegebene Gleichung durch ihren Factor $(x-a)$ dividiren können. In jedem Falle wird ihre vollständige Auflösung ohne Mühe auf die einer quadratischen Gleichung zurückgeführt, sobald eine Wurzel bekannt geworden. In der oben angeführten Gleichung $x^3-9x^2-4x+100=0$, wofür die Wurzel 4,1452... unmittelbar gesucht ist, findet man $S=+9-4{,}1452 = 4{,}8548$; und $P=\frac{-100}{4{,}1452\ldots}=-24{,}1242$; folglich ist

$$b = \tfrac{1}{2}(4{,}8548+\sqrt{23{,}5691+96{,}4968}) = +7{,}9061..$$
$$c = \tfrac{1}{2}(4{,}8548-\sqrt{23{,}5691+96{,}4968}) = -3{,}0513..$$

Man sieht leicht ein, daß auf dem nämlichen Wege jede Gleichung, allgemein vom n^{ten} Grade, auf eine quadratische sich reduciren läßt, sobald $(n-2)$ Wurzeln derselben bereits bekannt geworden sind.

208. Auflösung biquadratischer Gleichungen. Hat man sich bei einer Gleichung des vierten Grades von dem Dasein einer reellen Wurzel überzeugt, so muß wenigstens eine solche vorhanden sein und nach der Berechnung beider läßt sich die gegebene Gleichung auf eine quadratische reduciren, indem man sie entweder durch $(x-a)(x-b)$ dividirt, oder $(a+b)$ von dem, mit verändertem Zeichen genommenen Coefficienten des zweiten Gliedes abzieht, um $S=c+d$; und ab in das absolute Glied dividirt, um $P=c.d$ zu erhalten, worauf die obigen Formeln wieder zur Anwendung kommen.

Sei die gegebene biquadratische Gleichung:

$$x^4+8x^3+13x^2-8x+1=0,$$

ſo findet man bei der Subſtitution ganzer Zahlen nur für die Werthe -3, -4 und -5, -6 eine Zahlenabwechſelung. Zwei andere reelle Wurzeln können aber zwiſchen irgend zwei benachbarten ganzen Zahlen, und weil das Product aller $=1$ iſt, ächte Brüche oder zwiſchen 0 und 1 enthalten ſeyn. In der That finden wir durch Subſtitution von Decimalbrüchen:

X_0	$X_{0,1}$	$X_{0,2}$	$X_{0,3}$	$X_{0,4}$
$+1$	$+0,3381$	$-0,0144$	$-0,0059$	$+04176$

alſo zwiſchen 0,1 und 0,2 eine dritte, und zwiſchen 0,3 und 0,4 eine vierte reelle Wurzel der Gleichung. In Folgendem iſt die nähere Berechnung dieſer Wurzeln ausgeführt, welcher die Form:

$$\overset{0}{Y} + \overset{1}{Y}z + \overset{2}{Y}z^2 + \overset{3}{Y}z^3 + z^4 + 1 = 0$$

oder $(y^4 + 8y^3 + 13y^2 - 8y) + (4y^3 + 24y^2 + 26y - 8)z + (6y^2 + 24y + 13)z^2 + (4y + 8)z^3 + z^4 = -1$

zum Grunde gelegt werden muß.

1) $\quad -1 \parallel +0,192\ldots = a.$

$\overset{0}{Y} = -0,6619$

$(-0,33810000)$

Nebenrechnungen.

$\overset{1}{Y}z = -0,46404$	$\overset{1}{Y} = -5,156$	$\cdot 0,09 = -0,46404$
$\overset{2}{Y}z^2 = +0,125226$	$\overset{2}{Y} = +0,125226$	$\cdot 0,0081 = +0,125226$
$\overset{3}{Y}z^3 = +0,0061236$	$\overset{3}{Y} = +8,4$	$\cdot 0,000729 = +0,0061236$
$z^4 = +0,00006561$		

$-0,33262479$

$(-0,005475210000)$

$\overset{1}{Y}z = -0,004332328$ etc.	$\overset{1}{Y} = -2,166164$	$\cdot 0,002 = -0,004332328$

2) $\quad -1 \parallel +0,302\ldots = b.$

$\overset{0}{Y} = -1,0059$

$(+0,005900000000$

Nebenrechnungen.

$\overset{1}{Y}z = +0,004136$	$\overset{1}{Y} = +2,068$	$\cdot 0,002$
$\overset{2}{Y}z^2 = +0,00008296$	$\overset{2}{Y} = 20,74$	$\cdot 0,000004$
$\overset{3}{Y}z^3 = +0,000000073616$	$\overset{3}{Y} = 9,2$	$\cdot 0,000000008$

$+0,004219033616$

$(+0,001680966384)$

Zieht man nun von dem widerstreitend genommenen Coefficient. des zweiten Gliedes a+b, d. h. von −8 den Werth 0,494.. ab, so ist c+d=−8,494.., und dividirt man a. b in das absolute Glied, d. h. 0,057984 in 1, so wird der Quotient 17,144... = c. d. Folglich ist (nach §. 207)

3) $c = \frac{1}{2}(-8{,}494 + \sqrt{72{,}146 - 68{,}576}) = -3{,}302...$

4) $d = \frac{1}{2}(-8{,}494 - \sqrt{72{,}146 - 68{,}576}) = -5{,}192...$

209. Nähere Bestimmung der Wurzeln. Sollen die Zahlenwerthe der Wurzeln einer gegebenen numerischen Gleichung um noch mehrere (etwa die doppelte Menge der bereits berechneten) Decimalstellen genauer bestimmt werden, so ist ein einfacheres Divisionsverfahren anwendbar, welches im Vergleich der ursprünglichen Wurzelberechnung beträchtliche Erleichterung gewährt. Je niedriger nämlich der Rang der zuletzt gefundenen Ziffer ist, um so mehr ist man berechtigt, in der Gleichung

$$\overset{0}{Y} + \overset{1}{Y}z + \overset{2}{Y}z^2 + \overset{3}{Y}z^3 ..... + \overset{n}{Y}z^n + K = 0$$

sämmtliche Glieder, welche höhere Potenzen des noch zu suchenden Theils z enthalten, als unerheblich zu übersehen und sich auf die Gleichung $\overset{0}{Y} + \overset{1}{Y}z + K = 0$ zu beschränken, aus welcher der Näherungswerth

$$z = \left(\frac{-K-\overset{0}{Y}}{\overset{1}{Y}}\right), \text{ d.i. } = \frac{-K-(y^n + Ay^{n-1} + By^{n-2} + \text{etc.})}{ny^{n-1} + (n-1)Ay^{n-2} + (n-2)By^{n-3}}.$$

sich ergiebt, der in jedem speciellen Falle leicht zu berechnen ist. So folgt die nähere Bestimmung der Wurzel 0,302.. im obigen Beispiele einer biquadratischen Gleichung aus

$$z = \frac{-1-(y^4 + 8y^3 + 13y^2 - 8y)}{4y^3 + 24y^2 + 26y - 8} = \frac{-1 + 1{,}001682}{2{,}171064}$$

d. i. = 0,000774...; also b vollständiger = 0,302774...

Anhang
über die Cardanische Regel.

1. Algebraische Auflösung cubischer Gleichungen.

Eine Gleichung des dritten Grades von der allgemeinen Form $x^3+Ax^2+Bx+K=0$ algebraisch, d. h. unabhängig von den speciellen Werthen ihrer Coefficienten aufzulösen, setze man $x=y+z$, und bestimme den Werth von y so, daß in der Entwickelung:

$$(1)\quad (y^3+Ay^2+By+K)+(3y^2+2Ay+B)z+(3y+A)z^2+z^3=0$$

der Coefficient von z^2, d. i. $3y+a=0$ werde. Dieß geschieht, wenn $y=-\frac{1}{3}A$, und die Gleichung wird durch Einführung dieses Werthes:

$$2)\quad (\tfrac{2}{27}A^3-\tfrac{1}{3}AB+K)+(B-\tfrac{1}{3}A^2)z+z^3=0.$$

oder in kürzerer Andeutung:

$$(3)\quad z^3+Pz+Q=0.$$

Nunmehr setze man $z=\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}$, unter α und β gewisse Zahlenwerthe verstehend, die auf irgend eine, noch zu entdeckende Weise mit den bekannten Größen P und Q zusammen hängen, so wird:

$$z^3=\alpha+3\sqrt[3]{\alpha^2}.\sqrt[3]{\beta}+3\sqrt[3]{\alpha}.\sqrt[3]{\beta^2}+\beta$$
$$=(\alpha+\beta)+3\sqrt[3]{\alpha.\beta}.\left(\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}\right)=(\alpha+\beta)+3\sqrt[3]{\alpha\beta}.z$$

Also erhält die Gleichung die neue Gestalt:

$$(4)\quad (\alpha+\beta)+(3\sqrt[3]{\alpha\beta}+P)z+Q=0.$$

Offenbar wird dieser Gleichung Gnüge geschehen, wenn $\alpha+\beta+Q=0$ und zugleich $3\sqrt[3]{\alpha\beta}+P=0$ ist. Hiernach wäre

$$\alpha+\beta=-Q \text{ und } \alpha\beta=\tfrac{1}{27}P^3$$

und (nach 104 A. 6) $\alpha=\frac{1}{2}\left(-Q+\sqrt{Q^2+\frac{4}{27}P^3}\right)$

$$\beta=\frac{1}{2}\left(-Q-\sqrt{Q^2+\frac{4}{27}P^3}\right)$$

Also findet man als algebraischen Ausdruck der Wurzel:

$$(5)\quad z=\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}\left(-Q+\sqrt{Q^2+\tfrac{4}{27}P^3}\right)}+\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}\left(-Q-\sqrt{Q^2+\tfrac{4}{27}P^3}\right)}$$

Wenn die Größe $Q^2+\frac{4}{27}P^3$ negativ $=-R$ sein sollte, so erhält man einen imaginären Ausdruck für die Wurzel z, der sich indessen in einen reellen verwandelt, sobald man seine beiden Theile nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt, indem aus den Reihen für

$$\left(-\tfrac{1}{2}Q+\tfrac{1}{2}\sqrt{R}.i\right)^{\frac{1}{3}}+\left(-\tfrac{1}{2}Q-\tfrac{1}{2}\sqrt{R}.i\right)^{\frac{1}{3}}$$

unter einer der Formen

$$(1)\quad \left(-\tfrac{1}{2}Q\right)^{\frac{1}{3}}\left\{\left(1-\frac{\sqrt{R}}{Q}i\right)^{\frac{1}{3}}+\left(1+\frac{\sqrt{R}}{Q}i\right)^{\frac{1}{3}}\right\}$$

$$(2)\quad \left(\sqrt{R}i\right)^{\frac{1}{3}}\left\{\left(1+\frac{Q}{\sqrt{R}}i\right)^{\frac{1}{3}}-\left(1-\frac{Q}{\sqrt{R}}i\right)^{\frac{1}{3}}\right\}$$

der Factor i (nach 181 A. 4 u. 5) völlig verschwindet.

II. Algebraische Auflösung biquadratischer Gleichungen.

Sei die aufzulösende Gleichung des vierten Grades von der allgemeinen Form $x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+K=0$, so verwandelt sie sich, wenn man $(x-\frac{1}{4}A)$ für x substituirt in eine viergliedrige der Form

$$(1)\quad z^4+Pz^2+Qz+R=0.$$

Betrachtet man nun diese Gleichung als Product der beiden quadratischen

$$(z^2+az+b)=0, \qquad (z^2-az+c)=0,$$

so findet man durch Multiplication:

$$(2)\quad z^4+(b+c-a^2)z^2+(ac-ab)z+bc=0.$$

und durch Gleichsetzung dieses Ausdrucks mit (1):

$$b+c-a^2=P;\quad ac-ab=Q;\quad bc=R;$$

Daraus folgt, weil $c+b=P+a^2$ und $c-b=\frac{Q}{a}$ ist:

$$c=\tfrac{1}{2}\left(P+a^2+\frac{Q}{a}\right) \text{ und } b=\tfrac{1}{2}\left(P+a^2-\frac{Q}{a}\right)$$

$$\text{also } b.c \text{ oder } R=\tfrac{1}{4}\left(P^2+2Pa^2+a^4-\frac{Q^2}{a^2}\right)$$

Dieser Ausdruck giebt nach einiger Umgestaltung

(3) $a^6+2Pa^4+(P^2-4R)a^2-Q^2=0$,

oder wenn man $a^2=w$ setzt:

$$w^3+2Pw^2+(P^2-4R)w-Q^2=0,$$

mithin eine cubische Gleichung, durch deren Auflösung vermittelst der Cardanischen Regel man a, b, c entdeckt, und alsdann die gegebene biquadratische Gleichung in ihren beiden Factoren ohne Mühe auflösen kann.

Sechstes Kapitel.

Die Auflösung unbestimmter Gleichungen.

210. Unbestimmte Analysis. Enthält die aufzulösende Gleichung statt einer einzigen, zwei oder mehrere unbekannte Größen, so erscheinen die Werthe derselben völlig unbestimmt, und es ließen sich, wenn man neben ganzen und positiven auch gebrochene und negative Zahlenwerthe gestatten wollte, deren beliebige für die unbekannten Größen mit Ausschluß einer annehmen, und daraus die zugehörigen Werthe für diese eine jedesmal berechnen. Da aber die unbegränzte Anzahl solcher Auflösungen oder die unendliche Menge correspondirender Zahlenwerthe der unbekannten Größen eben so wenig Gegenstand allgemeiner Betrachtung sein kann, als in besondern Fällen, wo dergleichen unbestimmte Gleichungen auftreten, gestattet sein würde, so beschränkt man sich bei ihrer Auflösung auf ganze und positive Zahlenwerthe, die — wenn sie überhaupt möglich sind — in bestimmter Anzahl, oder auch in unendlicher Menge vorkommen können. Derjenige Zweig der Arithmetik, der sich ausschließlich mit der Auflösung unbestimmter Gleichungen beschäftigt, führt davon den Namen der unbestimten Analysis und beruht wegen

der Forderung ganzer Zahlenwerthe der unbekannten Größen so wesentlich auf den Untersuchungen über Theilbarkeit der Zahlen, daß davon, so wie von den Kettenbrüchen, deren Eigenschaften, bei der Auflösung benutzt werden können, einleitend das Nothwendigste mitgetheilt werden muß.

I. Von der Theilbarkeit der Zahlen.

211. Theilbarkeit der Summen. Nennt man eine ganze Zahl (Z) dann durch eine andere (k) theilbar, wenn sie ein 0, 1, 2, 3, 4 ... n faches derselben ist, so wird jede Summe $Z = a+b+c+d+$ etc. durch k theilbar sein, wenn die Summe der vereinigten Reste ihrer einzelnen Glieder es ist. Denn setzt man die Näherungswerthe der Quotienten in ganzen Zahlen:

$\frac{a}{k} = A$, $\frac{b}{k} = B$, $\frac{c}{k} = C$, ... und die Reste $= \alpha, \beta, \gamma ..$,

so ist $a+b+c+d .. = (A+B+C ..)k + (\alpha+\beta+\gamma ..)$ folglich Z durch k theilbar, wenn nur das letzte, aus den summirten Resten bestehende, Glied es ist.

Soll nun die Theilbarkeit der Zahlen in Beziehung auf gewisse Divisoren für ein bestimmtes Zahlensystem untersucht werden, so wird sich jede, nach demselben gebildete Zahl, deren Ziffern allgemein mit abc.....def bezeichnet werden mögen, als eine Summe betrachten lassen, deren Theile dem Range nach verschieden, nämlich fortlaufend um eins niedriger sind. Ihre allgemeinste Form ist demnach

$Z = a.10^n + b.10^{n-1} + c.10^{n-2} ... d.10^2 + e.10^1 + f.10^0$

Denkt man sich nun die Division durch eine gegebene ganze Zahl k an allen höheren Einheiten vorgenommen und die Quotienten durch A, B, C, .. die Reste hingegen durch $\alpha, \beta, \gamma ..$ bezeichnet, so entstehen die Gleichungen:

$10^n = Ak + \alpha$	also	a. $10^n = aAk + a\alpha$
$10^{n-1} = Bk + \beta$		b. $10^{n-1} = bBk + b\beta$
$10^{n-2} = Ck + \gamma$		c. $10^{n-2} = cCk + c\gamma$
.		.
.		.
.		.
.		.
$10^2 = Dk + \delta$		d. $10^2 = dDk + d\delta$
$10^1 = Ek + \varepsilon$		e. $10^1 = eEk + e\varepsilon$
$10^0 = ... 1$		f. $10^0 = ... f.$

und durch Summation derſelben das Endreſultat:

$$abc..def=(aA+bB..+eE)k+(a\alpha+b\beta..+e\varepsilon+f)$$

Alſo wird jede, in einem beſtimmten Zahlenſyſteme gegebene Zahl Z durch eine andere k dann theilbar ſein, wenn die Summe der Producte aus den einzelnen Ziffern in die, durch Diviſion von K in die Einheit ihrer Stellen entſtehenden, Reſte dadurch theilbar iſt.

212. Anwendung auf das Decimalſyſtem. Die Regeln für die Prüfung der Theilbarkeit einer gegebenen Zahl hängen zunächſt von der Grundzahl des Syſtems ab, wie denn z. B. alle durch Sieben theilbare Zahlen augenblicklich erkennbar ſind, wenn man nach dem heptadiſchen Syſteme rechnen und folglich die Potenzen von Sieben $=10, 100, 1000$ .... ſchreiben will, während ſie in dekadiſch gebildeten Zahlen nur mit Mühe erkannt werden. Viel einfacher läßt ſich die Theilbarkeit ſolcher durch 2, 4, 8... 3, 6, 9 beurtheilen, wie aus folgender Anwendung des obigen allgemeinen Satzes hervorgehen wird. Es ſei nämlich:

1) $k=2$; ſo iſt $\alpha, \beta, \gamma \ldots \varepsilon=0$, alſo Z theilbar, wenn die letzte Ziffer f es iſt
2) $k=3$; ſo iſt $\alpha, \beta, \gamma \ldots \varepsilon=1$, alſo Z theilbar, wenn die Querſumme der Ziffern $(a+b+c \ldots +f)$ ein Vielfaches von 3 iſt.
3) $k=4$, ſo iſt $\alpha, \beta, \ldots \delta=0$ und $\varepsilon=2$, alſo Z theilbar wenn $(2e=f)$ es iſt:
4) $k=5$; ſo iſt $\alpha, \beta, \gamma \ldots \varepsilon=0$, alſo Z diviſibel, wenn f es iſt.
5) $k=6$, ſo iſt $\alpha, \beta, \gamma \ldots \varepsilon=4$, alſo Z theilbar, wenn $4(a+b+c \ldots +e)+f$ es iſt.
6) $k=7$; ſo iſt die, ſich immer wiederholende, Reihenfolge der Reſte: 5, 4, 6, 2, 3, 1, alſo Z diviſibel, wenn $(\ldots 5a+4b+6c+2d+3e+f)$ es iſt.
7) $k=8$; ſo iſt $\varepsilon=2$, $\delta=4$ und jeder höhere Reſt $=0$, alſo Z theilbar, wenn $(4d+2\varepsilon+f)$ es iſt.
8) $k=9$; ſo iſt $\alpha, \beta, \gamma \ldots \varepsilon=1$, alſo Z diviſibel, wenn die Querſumme $(a+b+c \ldots +f)$ es iſt.

213. Theilbarkeit der Differenzen. Damit eine Differenz $(a-b)$ durch die Zahl k theilbar ſei, muß der

Unterschied der bei $\frac{a}{k}$ und $\frac{b}{k}$ gebliebenen Reste $(\alpha-\beta)$ es sein.

Denn setzt man:

$$a = Ak + \alpha \quad \text{und} \quad b = Bk + \beta,$$

so ist $a-b=(A-B)\,k+(\alpha-\beta)$, also nur dann durch k divisibel, wenn $\alpha-\beta$ es ist.

214. Theilbarkeit der Producte. Eben so kann das Product beliebiger Zahlen a, b, c, ... f, wenn einzelne Factoren desselben nicht ohnehin durch k divisibel sind, nur dann durch diese Zahl getheilt werden, wenn das Product der Reste $\alpha.\beta.\gamma\ldots\varepsilon.\varphi$ gleiches gestattet. Denn es sei $a=Ak+\alpha$, $b=Bk+\beta$, .. $f=Fk+\varphi$, so gibt die Multiplication dieser Formen (nach §. 172) eine nach den Potenzen von k fortschreitende Reihe, deren absolutes Glied $=\alpha.\beta.\gamma..\varphi$ ist, als Werth von a. b. c..f. Da in derselben alle übrigen Glieder k zum Factor haben, so hängt von ihm allein die Theilbarkeit des ganzen Products ab.

Denkt man sich unter k eine Primzahl, so entsteht durch die Multiplication der (nothwendig kleineren) Reste $\alpha, \beta, \gamma..\varphi$ eine zusammengesetzte Zahl, von welcher k, als unzerlegbar, nicht Factor sein kann. Daraus folgt, in Rücksicht auf den obigen Satz, daß, wenn die einzelnen Factoren nicht durch eine Primzahl k theilbar sind, auch ihr Product es nicht sein könne.

215. Theilbarkeit der Potenzen. Um zu prüfen, ob irgend eine Potenz Z^n durch k getheilt werden könne, darf man nur den — durch Division von Z durch k sich ergebenden — Rest auf die vorgeschriebene Potenz erheben und durch k dividiren. Denn wird $Z=mk+h$ gesetzt, so ist $Z^n=(mk)^n+n.(mk)^{n-1}.h\ldots+(mk)h+h^n$, folglich dann durch k theilbar, wenn h^n es ist. So kann z. B. 5138^5 durch 8 getheilt worden, weil in $5138^5=(8.642+2)^5$ das letzte Glied der unentwickelten Reihe, $2^5=32$, durch 8 theilbar ist; nicht so hingegen $5238^3=(8.654+6)^3$, weil die Entwickelung dieses Ausdruckes mit $6^3=216$ schließt.

Den ersten Theil der Wurzel $y=4$ setzend, findet man dann die folgenden Ziffern successiv, indem man zu dem jedesmal bekannten y ein neues z sucht, wie in folgender Ausführung der Rechnung:

$$\begin{array}{r|l} -100 & 4{,}1452\ldots \\ \overset{0}{Y}=-96 & \\ \hline (-4000) & \end{array}$$

Nebenrechnungen.

$$\begin{array}{l} \overset{1}{Y}z=-2{,}8 \\ \overset{2}{Y}z^2=+0{,}03 \\ z^3=+0{,}001 \\ \hline -2{,}769 \\ \hline (-1{,}231000) \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \overset{1}{Y}=-28 & .\ 0{,}1=-2{,}8 \\ \overset{2}{Y}=3 & .\ 0{,}01=0{,}03 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \overset{1}{Y}z=-1{,}0948 \\ \overset{2}{Y}z^2=+0{,}00528 \\ z^3=+0{,}000064 \\ \hline -1{,}089456 \\ \hline (-0{,}141544000) \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \overset{1}{Y}=-27{,}37 & .\ 0{,}04=-1{,}0948 \\ \overset{2}{Y}=3{,}3 & .\ 0016=0{,}00528 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \overset{1}{Y}z=-0{,}1355060 \\ \overset{2}{Y}z^2=+0{,}00008550 \\ z^3=+0{,}000000125. \\ \hline -0{,}135420375 \\ \hline (-0{,}006123625) \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \overset{1}{Y}=-27{,}1012 & .\ 0{,}005=0{,}1355060 \\ \overset{2}{Y}=3{,}42 & .\ 0{,}000025 \\ & =0{,}0008550 \end{array}$$

Die beiden andern Wurzeln, deren eine zwischen 7 und 8, die andere zwischen -3 und -4 fällt, könnten auf die nämliche Weise berechnet werden. Hat man aber eine reelle Wurzel einer cubischen Gleichung hinlänglich genau bestimmt, so ist es zweckmäßiger, die übrigen beiden, zumal da diese vielleicht imaginär sind, auf nachfolgendem Wege zu bestimmen.

207. Reduction cubischer Gleichungen. Ist für eine Gleichung des dritten Grades, deren Wurzeln mit a, b, c bezeichnet werden mögen, so daß sie (nach §. 197) unter die allgemeine Form

$$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x=abc$$

fällt, eine Wurzel a bekannt, so hat man dadurch auch die Summe und das Product der beiden noch unbekannten, indem man vom Coefficienten des zweiten Gliedes mit verändertem Zeichen genommen, a subtrahirt und das absolute Glied durch a dividirt. Werde jene mit S, dieses mit P bezeichnet, so finden sich b und c durch Auflösung der beiden Gleichungen $b+c=S$ und $b \cdot c=P$ (nach §. 104 A. 6) ausgedrückt in den Formeln:

$$b = \tfrac{1}{2}(S+\sqrt{S^2-4P})$$
$$c = \tfrac{1}{2}(S-\sqrt{S^2-4P})$$

Ist a eine rationale Zahl, so hätte man kürzer die gegebene Gleichung durch ihren Factor $(x-a)$ dividiren können. In jedem Falle wird ihre vollständige Auflösung ohne Mühe auf die einer quadratischen Gleichung zurückgeführt, sobald eine Wurzel bekannt geworden. In der oben angeführten Gleichung $x^3-9x^2-4x+100=0$, wofür die Wurzel 4,1452... unmittelbar gesucht ist, findet man $S=+9-4{,}1452 = 4{,}8548$; und $P=\frac{-100}{4{,}1452\ldots}=-24{,}1242$; folglich ist

$$b = \tfrac{1}{2}(4{,}8548+\sqrt{23{,}5691+96{,}4968}) = +7{,}9061..$$
$$c = \tfrac{1}{2}(4{,}8548-\sqrt{23{,}5691+96{,}4968}) = -3{,}0513..$$

Man sieht leicht ein, daß auf dem nämlichen Wege jede Gleichung, allgemein vom n^{ten} Grade, auf eine quadratische sich reduciren läßt, sobald $(n-2)$ Wurzeln derselben bereits bekannt geworden sind.

208. Auflösung biquadratischer Gleichungen. Hat man sich bei einer Gleichung des vierten Grades von dem Dasein einer reellen Wurzel überzeugt, so muß wenigstens eine solche vorhanden sein und nach der Berechnung beider läßt sich die gegebene Gleichung auf eine quadratische reduciren, indem man sie entweder durch $(x-a)(x-b)$ dividirt, oder $(a+b)$ von dem, mit verändertem Zeichen genommenen Coefficienten des zweiten Gliedes abzieht, um $S=c+d$; und ab in das absolute Glied dividirt, um $P=c.d$ zu erhalten, worauf die obigen Formeln wieder zur Anwendung kommen.

Sei die gegebene biquadratische Gleichung:

$$x^4+8x^3+13x^2-8x+1=0,$$

so findet man bei der Substitution ganzer Zahlen nur für die Werthe -3, -4 und -5, -6 eine Zahlenabwechselung. Zwei andere reelle Wurzeln können aber zwischen irgend zwei benachbarten ganzen Zahlen, und weil das Product aller $=1$ ist, ächte Brüche oder zwischen 0 und 1 enthalten seyn. In der That finden wir durch Substitution von Decimalbrüchen:

X_0	$X_{0,1}$	$X_{0,2}$	$X_{0,3}$	$X_{0,4}$
$+1$	$+0,3381$	$-0,0144$	$-0,0059$	$+04176$

also zwischen 0,1 und 0,2 eine dritte, und zwischen 0,3 und 0,4 eine vierte reelle Wurzel der Gleichung. In Folgendem ist die nähere Berechnung dieser Wurzeln ausgeführt, welcher die Form:

$$Y + Yz + Yz^2 + Yz^3 + z^4 + 1 = 0$$

oder $(y^4 + 8y^3 + 13y^2 - 8y) + (4y^3 + 24y^2 + 26y - 8)z + (6y^2 + 24y + 13)z^2 + (4y + 8)z^3 + z^4 = -1$

zum Grunde gelegt werden muß.

1) $-1 \parallel +0,192\ldots = a.$

$Y = -0,6619$

$(-0,33810000)$

Nebenrechnungen.

$Yz = -0,46404$	$Y = -5,156$	$\cdot 0,09 = -0,46404$
$Yz^2 = +0,125226$	$Y = +0,125226$	$\cdot 0,0081 = +0,125226$
$Yz^3 = +0,0061236$	$Y = +8,4$	$\cdot 0,000729 = +0,0061236$
$z^4 = +0,00006561$		
$-0,33262479$		

$(-0,005475210000)$

$Yz = -0,004332328$	$Y = -2,166164$	$\cdot 0,002 = -0,004332328$
etc.		

2) $-1 \parallel +0,302\ldots = b.$

$Y = -1,0059$

$(+0,005900000000$

Nebenrechnungen.

$Yz = +0,004136$	$Y = +2,068$	$\cdot 0,002$
$Yz^2 = +0,00008296$	$Y = 20,74$	$\cdot 0,000004$
$Yz^3 = +0,000000073616$	$Y = 9,2$	$\cdot 0,000000008$
$+0,004219033616$		

(0966384)

Zieht man nun von dem widerstreitend genommenen Coefficient. des zweiten Gliedes a+b, d. h. von −8 den Werth 0,494.. ab, so ist c+d=−8,494.., und dividirt man a. b in das absolute Glied, d. h. 0,057984 in 1, so wird der Quotient 17,144... = c. d. Folglich ist (nach §. 207)

3) $c = \frac{1}{2}(-8{,}494 + \sqrt{72{,}146 - 68{,}576}) = -3{,}302...$

4) $d = \frac{1}{2}(-8{,}494 - \sqrt{72{,}146 - 68{,}576}) = -5{,}192...$

209. **Nähere Bestimmung der Wurzeln.** Sollen die Zahlenwerthe der Wurzeln einer gegebenen numerischen Gleichung um noch mehrere (etwa die doppelte Menge der bereits berechneten) Decimalstellen genauer bestimmt werden, so ist ein einfacheres Divisionsverfahren anwendbar, welches im Vergleich der ursprünglichen Wurzelberechnung beträchtliche Erleichterung gewährt. Je niedriger nämlich der Rang der zuletzt gefundenen Ziffer ist, um so mehr ist man berechtigt, in der Gleichung

$$Y + Yz + Yz^2 + Yz^3 \ldots\ldots + Yz^n + K = o$$

sämmtliche Glieder, welche höhere Potenzen des noch zu suchenden Theils z enthalten, als unerheblich zu übersehen und sich auf die Gleichung $Y + Yz + K = o$ zu beschränken, aus welcher der Näherungswerth

$$z = \left(\frac{-K-Y}{Y}\right), \text{ d.i. } = \frac{-K-(y^n + Ay^{n-1} + By^{n-2} + \text{etc.})}{ny^{n-1} + (n-1)Ay^{n-2} + (n-2)By^{n-3}}.$$

sich ergiebt, der in jedem speciellen Falle leicht zu berechnen ist. So folgt die nähere Bestimmung der Wurzel 0,302.. im obigen Beispiele einer biquadratischen Gleichung aus

$$z = \frac{-1-(y^4 + 8y^3 + 13y^2 - 8y)}{4y^3 + 24y^2 + 26y - 8} = \frac{-1 + 1{,}001682}{2{,}171064}$$

d. i. = 0,000774...; also b vollständiger = 0,302774...

Anhang
über die Cardanische Regel.

1. Algebraische Auflösung cubischer Gleichungen.

Eine Gleichung des dritten Grades von der allgemeinen Form $x^3+Ax^2+Bx+K=0$ algebraisch, d. h. unabhängig von den speciellen Werthen ihrer Coefficienten aufzulösen, setze man $x=y+z$, und bestimme den Werth von y so, daß in der Entwickelung:

$$(1)\quad (y^3+Ay^2+By+K)+(3y^2+2Ay+B)z+(3y+A)z^2+z^3=0$$

der Coefficient von z^2, d. i. $3y+a=0$ werde. Dieß geschieht, wenn $y=-\frac{1}{3}A$, und die Gleichung wird durch Einführung dieses Werthes:

$$2)\quad (\tfrac{2}{27}A^3-\tfrac{1}{3}AB+K)+(B-\tfrac{1}{3}A^2)z+z^3=0.$$

oder in kürzerer Andeutung:

$$(3)\quad z^3+Pz+Q=0.$$

Nunmehr setze man $z=\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}$, unter α und β gewisse Zahlenwerthe verstehend, die auf irgend eine, noch zu entdeckende Weise mit den bekannten Größen P und Q zusammen hängen, so wird:

$$z^3=\alpha+3\sqrt[3]{\alpha^2}.\sqrt[3]{\beta}+3\sqrt[3]{\alpha}.\sqrt[3]{\beta^2}+\beta$$
$$=(\alpha+\beta)+3\sqrt[3]{\alpha.\beta}.\left(\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}\right)=(\alpha+\beta)+3\sqrt[3]{\alpha\beta}.z$$

Also erhält die Gleichung die neue Gestalt:

$$(4)\quad (\alpha+\beta)+(3\sqrt[3]{\alpha\beta}+P)z+Q=0.$$

Offenbar wird dieser Gleichung Gnüge geschehen, wenn $\alpha+\beta+Q=0$ und zugleich $3\sqrt[3]{\alpha\beta}+P=0$ ist. Hiernach wäre

$$\alpha+\beta=-Q \text{ und } \alpha\beta=\tfrac{1}{27}P^3$$

und (nach 104 A. 6) $\alpha=\frac{1}{2}\left(-Q+\sqrt{Q^2+\frac{4}{27}P^3}\right)$

$$\beta=\frac{1}{2}\left(-Q-\sqrt{Q^2+\frac{4}{27}P^3}\right)$$

Also findet man als algebraischen Ausdruck der Wurzel:

$$(5)\quad z=\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}\left(-Q+\sqrt{Q^2+\tfrac{4}{27}P^3}\right)}+\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}\left(-Q-\sqrt{Q^2+\tfrac{4}{27}P^3}\right)}$$

Wenn die Größe $Q^2+\frac{4}{27}P^2$ negativ $=-R$ sein sollte, so erhält man einen imaginären Ausdruck für die Wurzel z, der sich indessen in einen reellen verwandelt, sobald man seine beiden Theile nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt, indem aus den Reihen für

$$\left(-\tfrac{1}{2}Q+\tfrac{1}{2}\sqrt{R}.i\right)^{\frac{1}{3}}+\left(-\tfrac{1}{2}Q-\tfrac{1}{2}\sqrt{R}.i\right)^{\frac{1}{3}}$$

unter einer der Formen

$$(1)\quad \left(-\tfrac{1}{2}Q\right)^{\frac{1}{3}}\left\{\left(1-\frac{\sqrt{R}}{Q}i\right)^{\frac{1}{3}}+\left(1+\frac{\sqrt{R}}{Q}i\right)^{\frac{1}{3}}\right\}$$

$$(2)\quad \left(\sqrt{R}i\right)^{\frac{1}{3}}\left\{\left(1+\frac{Q}{\sqrt{R}}i\right)^{\frac{1}{3}}-\left(1-\frac{Q}{\sqrt{R}}i\right)^{\frac{1}{3}}\right\}$$

der Factor i (nach 181 A. 4 u. 5) völlig verschwindet.

II. Algebraische Auflösung biquadratischer Gleichungen.

Sei die aufzulösende Gleichung des vierten Grades von der allgemeinen Form $x^4+Ax^3+Bx+^2Cx+K=0$, so verwandelt sie sich, wenn man $(x-\frac{1}{4}A)$ für x substituirt in eine viergliedrige der Form

$$(1)\quad z^4+Pz^2+Qz+R=0.$$

Betrachtet man nun diese Gleichung als Product der beiden quadratischen

$$(z^2+az+b)=0, \qquad (z^2-az+c)=0,$$

so findet man durch Multiplication:

$$(2)\quad z^4+(b+c-a^2)z^2+(ac-ab)z+bc=0.$$

und durch Gleichsetzung dieses Ausdrucks mit (1):

$$b+c-a^2=P;\quad ac-ab=Q;\quad bc=R;$$

Daraus folgt, weil $c+b=P+a^2$ und $c-b=\frac{Q}{a}$ ist:

$$c=\tfrac{1}{2}\left(P+a^2+\frac{Q}{a}\right) \text{ und } b=\tfrac{1}{2}\left(P+a^2-\frac{Q}{a}\right)$$

$$\text{also } b.c \text{ oder } R=\tfrac{1}{4}\left(P^2+2Pa^2+a^4-\frac{Q^2}{a^2}\right)$$

Dieser Ausdruck giebt nach einiger Umgestaltung

(3) $a^6+2Pa^4+(P^2-4R)a^2-Q^2=0$,

oder wenn man $a^2=w$ setzt:

$$w^3+2Pw^2+(P^2-4R)w-Q^2=0,$$

mithin eine cubische Gleichung, durch deren Auflösung vermittelst der Cardanischen Regel man a, b, c entdeckt, und alsdann die gegebene biquadratische Gleichung in ihren beiden Factoren ohne Mühe auflösen kann.

Sechstes Kapitel.

Die Auflösung unbestimmter Gleichungen.

210. Unbestimmte Analysis. Enthält die aufzulösende Gleichung statt einer einzigen, zwei oder mehrere unbekannte Größen, so erscheinen die Werthe derselben völlig unbestimmt, und es ließen sich, wenn man neben ganzen und positiven auch gebrochene und negative Zahlenwerthe gestatten wollte, deren beliebige für die unbekannten Größen mit Ausschluß einer annehmen, und daraus die zugehörigen Werthe für diese eine jedesmal berechnen. Da aber die unbegränzte Anzahl solcher Auflösungen oder die unendliche Menge correspondirender Zahlenwerthe der unbekannten Größen eben so wenig Gegenstand allgemeiner Betrachtung sein kann, als in besondern Fällen, wo dergleichen unbestimmte Gleichungen auftreten, gestattet sein würde, so beschränkt man sich bei ihrer Auflösung auf ganze und positive Zahlenwerthe, die — wenn sie überhaupt möglich sind — in bestimmter Anzahl, oder auch in unendlicher Menge vorkommen können. Derjenige Zweig der Arithmetik, der sich ausschließlich mit der Auflösung unbestimmter Gleichungen beschäftigt, führt davon den Namen der unbestimten Analysis und beruht wegen

der Forderung ganzer Zahlenwerthe der unbekannten Größen so wesentlich auf den Untersuchungen über Theilbarkeit der Zahlen, daß davon, so wie von den Kettenbrüchen, deren Eigenschaften, bei der Auflösung benutzt werden können, einleitend das Nothwendigste mitgetheilt werden muß.

I. Von der Theilbarkeit der Zahlen.

211. Theilbarkeit der Summen. Nennt man eine ganze Zahl (Z) dann durch eine andere (k) theilbar, wenn sie ein 0, 1, 2, 3, 4 ... n faches derselben ist, so wird jede Summe $Z = a+b+c+d+$ etc. durch k theilbar sein, wenn die Summe der vereinigten Reste ihrer einzelnen Glieder es ist. Denn setzt man die Näherungswerthe der Quotienten in ganzen Zahlen:

$\frac{a}{k} = A, \frac{b}{k} = B, \frac{c}{k} = C, \ldots$ und die Reste $= \alpha, \beta, \gamma \ldots$

so ist $a+b+c+d \ldots = (A+B+C \ldots)k+(\alpha+\beta+\gamma \ldots)$ folglich Z durch k theilbar, wenn nur das letzte, aus den summirten Resten bestehende, Glied es ist.

Soll nun die Theilbarkeit der Zahlen in Beziehung auf gewisse Divisoren für ein bestimmtes Zahlensystem untersucht werden, so wird sich jede, nach demselben gebildete Zahl, deren Ziffern allgemein mit abc.... def bezeichnet werden mögen, als eine Summe betrachten lassen, deren Theile dem Range nach verschieden, nämlich fortlaufend um eins niedriger sind. Ihre allgemeinste Form ist demnach

$$Z = a.10^n + b.10^{n-1} + c.10^{n-2} \ldots d.10^2 + e.10^1 + f.10^0$$

Denkt man sich nun die Division durch eine gegebene ganze Zahl k an allen höheren Einheiten vorgenommen und die Quotienten durch A, B, C, .. die Reste hingegen durch $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ bezeichnet, so entstehen die Gleichungen:

$10^n = Ak + \alpha$	also	a. $10^n = aAk + a\alpha$
$10^{n-1} = Bk + \beta$		b. $10^{n-1} = bBk + b\beta$
$10^{n-2} = Ck + \gamma$		c. $10^{n-2} = cCk + c\gamma$
.		.
.		.
.		.
.		.
$10^2 = Dk + \delta$		d. $10^2 = dDk + d\delta$
$10^1 = Ek + \varepsilon$		e. $10^1 = eEk + e\varepsilon$
$10^0 = \ldots . 1$		f. $10^0 = \ldots . f.$

und durch Summation derſelben das Endreſultat:

$$abc..def=(aA+bB..+eE)k+(a\alpha+b\beta..+e\varepsilon+f)$$

Alſo wird jede, in einem beſtimmten Zahlenſyſteme gegebene Zahl Z durch eine andere k dann theilbar ſein, wenn die Summe der Producte aus den einzelnen Ziffern in die, durch Diviſion von K in die Einheit ihrer Stellen entſtehenden, Reſte dadurch theilbar iſt.

212. Anwendung auf das Decimalſyſtem. Die Regeln für die Prüfung der Theilbarkeit einer gegebenen Zahl hängen zunächſt von der Grundzahl des Syſtems ab, wie denn z. B. alle durch Sieben theilbare Zahlen augenblicklich erkennbar ſind, wenn man nach dem heptadiſchen Syſteme rechnen und folglich die Potenzen von Sieben $=10, 100, 1000$ .... ſchreiben will, während ſie in dekadiſch gebildeten Zahlen nur mit Mühe erkannt werden. Viel einfacher läßt ſich die Theilbarkeit ſolcher durch 2, 4, 8... 3, 6, 9 beurtheilen, wie aus folgender Anwendung des obigen allgemeinen Satzes hervorgehen wird. Es ſei nämlich:

1) $k=2$; ſo iſt $\alpha, \beta, \gamma \ldots \varepsilon=0$, alſo Z theilbar, wenn die letzte Ziffer f es iſt
2) $k=3$; ſo iſt $\alpha, \beta, \gamma \ldots \varepsilon=1$, alſo Z theilbar, wenn die Querſumme der Ziffern $(a+b+c \ldots +f)$ ein Vielfaches von 3 iſt.
3) $k=4$, ſo iſt $\alpha, \beta, \ldots \delta=0$ und $\varepsilon=2$, alſo Z theilbar wenn $(2e=f)$ es iſt:
4) $k=5$; ſo iſt $\alpha, \beta, \gamma \ldots \varepsilon=0$, alſo Z diviſibel, wenn f es iſt.
5) $k=6$, ſo iſt $\alpha, \beta, \gamma \ldots . \varepsilon=4$, alſo Z theilbar, wenn $4(a+b+c \ldots +e)+f$ es iſt.
6) $k=7$; ſo iſt die, ſich immer wiederholende, Reihenfolge der Reſte: 5, 4, 6, 2, 3, 1, alſo Z diviſibel, wenn $(\ldots . 5a+4b+6c+2d+3e+f)$ es iſt.
7) $k=8$; ſo iſt $\varepsilon=2$, $\delta=4$ und jeder höhere Reſt $=0$, alſo Z theilbar, wenn $(4d+2\varepsilon+f)$ es iſt.
8) $k=9$; ſo iſt $\alpha, \beta, \gamma \ldots \varepsilon=1$, alſo Z diviſibel, wenn die Querſumme $(a+b+c \ldots +f)$ es iſt.

213. Theilbarkeit der Differenzen. Damit eine Differenz $(a-b)$ durch die Zahl k theilbar ſei, muß der

Unterschied der bei $\frac{a}{k}$ und $\frac{b}{k}$ gebliebenen Reste $(\alpha - \beta)$ es sein.

Denn setzt man:

$$a = Ak + \alpha \quad \text{und} \quad b = Bk + \beta,$$

so ist $a - b = (A - B)\,k + (\alpha - \beta)$, also nur dann durch k divisibel, wenn $\alpha - \beta$ es ist.

214. Theilbarkeit der Producte. Eben so kann das Product beliebiger Zahlen a, b, c, ... f, wenn einzelne Factoren desselben nicht ohnehin durch k divisibel sind, nur dann durch diese Zahl getheilt werden, wenn das Product der Reste $\alpha . \beta . \gamma \ldots \varepsilon . \varphi$ gleiches gestattet. Denn es sei $a = Ak + \alpha$, $b = Bk + \beta$, $\ldots f = Fk + \varphi$, so gibt die Multiplication dieser Formen (nach §. 172) eine nach den Potenzen von k fortschreitende Reihe, deren absolutes Glied $= \alpha . \beta . \gamma \ldots \varphi$ ist, als Werth von a. b. c. . f. Da in derselben alle übrigen Glieder k zum Factor haben, so hängt von ihm allein die Theilbarkeit des ganzen Products ab.

Denkt man sich unter k eine Primzahl, so entsteht durch die Multiplication der (nothwendig kleineren) Reste $\alpha, \beta, \gamma \ldots \varphi$ eine zusammengesetzte Zahl, von welcher k, als unzerlegbar, nicht Factor sein kann. Daraus folgt, in Rücksicht auf den obigen Satz, daß, wenn die einzelnen Factoren nicht durch eine Primzahl k theilbar sind, auch ihr Product es nicht sein könne.

215. Theilbarkeit der Potenzen. Um zu prüfen, ob irgend eine Potenz Z^n durch k getheilt werden könne, darf man nur den — durch Division von Z durch k sich ergebenden — Rest auf die vorgeschriebene Potenz erheben und durch k dividiren. Denn wird $Z = mk + h$ gesetzt, so ist $Z^n = (mk)^n + n.(mk)^{n-1}.h \ldots + (mk)h + h^n$, folglich dann durch k theilbar, wenn h^n es ist. So kann z. B. 5138^5 durch 8 getheilt worden, weil in $5138^5 = (8.642 + 2)^5$ das letzte Glied der unentwickelten Reihe, $2^5 = 32$, durch 8 theilbar ist; nicht so hingegen $5238^3 = (8.654 + 6)^3$, weil die Entwickelung dieses Ausdruckes mit $6^3 = 216$ schließt.

Den ersten Theil der Wurzel $y=4$ setzend, findet man dann die folgenden Ziffern successiv, indem man zu dem jedesmal bekannten y ein neues z sucht, wie in folgender Ausführung der Rechnung:

$$\begin{array}{r|l} -100 & 4{,}1452\ldots \\ \overset{0}{Y}=-96 & \\ \hline (-4000) & \end{array}$$

Nebenrechnungen.

$$\begin{array}{l|l|l} \overset{1}{Y}z=-2{,}8 & \overset{1}{Y}=-28 & .\ 0{,}1=-2{,}8 \\ \overset{2}{Y}z^2=+0{,}03 & \overset{2}{Y}=3 & .\ 0{,}01=0{,}03 \\ z^3=+0{,}001 & & \\ \hline -2{,}769 & & \\ \hline (-1{,}231000) & & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l|l} \overset{1}{Y}z=-1{,}0948 & \overset{1}{Y}=-27{,}37 & .\ 0{,}04=-1{,}0948 \\ \overset{2}{Y}z^2=+0{,}00528 & \overset{2}{Y}=3{,}3 & .\ 0016=0{,}00528 \\ z^3=+0{,}000064 & & \\ \hline -1{,}089456 & & \\ \hline (-0{,}141544000) & & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l|l} \overset{1}{Y}z=-0{,}1355060 & \overset{1}{Y}=-27{,}1012 & .\ 0{,}005=0{,}1355060 \\ \overset{2}{Y}z^2=+0{,}00008550 & \overset{2}{Y}=3{,}42 & .\ 0{,}000025 \\ z^3=+0{,}000000125. & & =0{,}0008550 \\ \hline -0{,}135420375 & & \\ \hline (-0{,}006123625) & & \end{array}$$

Die beiden andern Wurzeln, deren eine zwischen 7 und 8, die andere zwischen -3 und -4 fällt, könnten auf die nämliche Weise berechnet werden. Hat man aber eine reelle Wurzel einer cubischen Gleichung hinlänglich genau bestimmt, so ist es zweckmäßiger, die übrigen beiden, zumal da diese vielleicht imaginär sind, auf nachfolgendem Wege zu bestimmen.

207. Reduction cubischer Gleichungen. Ist für eine Gleichung des dritten Grades, deren Wurzeln mit a, b, c bezeichnet werden mögen, so daß sie (nach §. 197) unter die allgemeine Form

$$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x=abc$$

fällt, eine Wurzel a bekannt, so hat man dadurch auch die Summe und das Product der beiden noch unbekannten, indem man vom Coefficienten des zweiten Gliedes mit verändertem Zeichen genommen, a subtrahirt und das absolute Glied durch a dividirt. Werde jene mit S, dieses mit P bezeichnet, so finden sich b und c durch Auflösung der beiden Gleichungen $b+c=S$ und $b.c=P$ (nach §. 104 A. 6) ausgedrückt in den Formeln:

$$b = \tfrac{1}{2}(S+\sqrt{S^2-4P})$$
$$c = \tfrac{1}{2}(S-\sqrt{S^2-4P})$$

Ist a eine rationale Zahl, so hätte man kürzer die gegebene Gleichung durch ihren Factor $(x-a)$ dividiren können. In jedem Falle wird ihre vollständige Auflösung ohne Mühe auf die einer quadratischen Gleichung zurückgeführt, sobald eine Wurzel bekannt geworden. In der oben angeführten Gleichung $x^3-9x^2-4x+100=0$, wofür die Wurzel 4, 1452... unmittelbar gesucht ist, findet man $S=+9-4,1452 = 4,8548$; und $P=\frac{-100}{4,1452\ldots}=-24,1242$; folglich ist

$$b = \tfrac{1}{2}(4,8548+\sqrt{23,5691+96,4968}) = +7,9061..$$
$$c = \tfrac{1}{2}(4,8548-\sqrt{23,5691+96,4968}) = -3,0513..$$

Man sieht leicht ein, daß auf dem nämlichen Wege jede Gleichung, allgemein vom n^{ten} Grade, auf eine quadratische sich reduciren läßt, sobald $(n-2)$ Wurzeln derselben bereits bekannt geworden sind.

208. Auflösung biquadratischer Gleichungen. Hat man sich bei einer Gleichung des vierten Grades von dem Dasein einer reellen Wurzel überzeugt, so muß wenigstens eine solche vorhanden sein und nach der Berechnung beider läßt sich die gegebene Gleichung auf eine quadratische reduciren, indem man sie entweder durch $(x-a)(x-b)$ dividirt, oder $(a+b)$ von dem, mit verändertem Zeichen genommenen Coefficienten des zweiten Gliedes abzieht, um $S=c+d$; und ab in das absolute Glied dividirt, um $P=c.d$ zu erhalten, worauf die obigen Formeln wieder zur Anwendung kommen.

Sei die gegebene biquadratische Gleichung:

$$x^4+8x^3+13x^2-8x+1=0,$$

so findet man bei der Substitution ganzer Zahlen nur für die Werthe -3, -4 und -5, -6 eine Zahlenabwechselung. Zwei andere reelle Wurzeln können aber zwischen irgend zwei benachbarten ganzen Zahlen, und weil das Product aller $=1$ ist, ächte Brüche oder zwischen 0 und 1 enthalten seyn. In der That finden wir durch Substitution von Decimalbrüchen:

X_0	$X_{0,1}$	$X_{0,2}$	$X_{0,3}$	$X_{0,4}$
$+1$	$+0,3381$	$-0,0144$	$-0,0059$	$+04176$

also zwischen 0,1 und 0,2 eine dritte, und zwischen 0,3 und 0,4 eine vierte reelle Wurzel der Gleichung. In Folgendem ist die nähere Berechnung dieser Wurzeln ausgeführt, welcher die Form:

$$Y^0 + Yz^1 + Yz^2 + Yz^3 + z^4 + 1 = 0$$

oder $(y^4+8y^3+13y^2-8y) + (4y^3+24y^2+26y-8)z + (6y^2+24y+13)z^2 + (4y+8)z^3 + z^4 = -1$

zum Grunde gelegt werden muß.

1) $-1 \parallel +0,192\ldots = a.$

$Y^0 = -0,6619$

$(-0,33810000)$

Nebenrechnungen.

$Yz^1 = -0,46404$	$Y^1 = -5,156$	$.0,09 = -0,46404$
$Yz^2 = +0,125226$	$Y^2 = +0,125226$	$.0,0081 = +0,125226$
$Yz^3 = +0,0061236$	$Y^3 = +8,4$	$.0,000729 = +0,0061236$
$z^4 = +0,00006561$		
$-0,33262479$		
$(-0,005475210000)$		
$Yz^1 = -0,004332328$ etc.	$Y^1 = -2,166164$	$.0,002 = -0,004332328$

2) $-1 \parallel +0,302\ldots = b.$

$Y^0 = -1,0059$

$(+0,005900000000$

Nebenrechnungen.

$Yz^1 = +0,004136$	$Y^1 = +2,068$	$.0,002$
$Yz^2 = +0,00008296$	$Y^2 = 20,74$	$.0,000004$
$Yz^3 = +0,000000073616$	$Y^3 = 9,2$	$.0,000000008$
$+0,004219033616$		
$(+0,001680966384)$		

Zieht man nun von dem widerstreitend genommenen Coefficient. des zweiten Gliedes a + b, d. h. von − 8 den Werth 0,494.. ab, so ist c + d = − 8,494.., und dividirt man a. b in das absolute Glied, d. h. 0,057984 in 1, so wird der Quotient 17,144... = c. d. Folglich ist (nach §. 207)

3) $c = \frac{1}{2}(-8{,}494 + \sqrt{72{,}146 - 68{,}576}) = -3{,}302...$

4) $d = \frac{1}{2}(-8{,}494 - \sqrt{72{,}146 - 68{,}576}) = -5{,}192...$

209. Nähere Bestimmung der Wurzeln. Sollen die Zahlenwerthe der Wurzeln einer gegebenen numerischen Gleichung um noch mehrere (etwa die doppelte Menge der bereits berechneten) Decimalstellen genauer bestimmt werden, so ist ein einfacheres Divisionsverfahren anwendbar, welches im Vergleich der ursprünglichen Wurzelberechnung beträchtliche Erleichterung gewährt. Je niedriger nämlich der Rang der zuletzt gefundenen Ziffer ist, um so mehr ist man berechtigt, in der Gleichung

$$\overset{0}{Y} + \overset{1}{Y}z + \overset{2}{Y}z^2 + \overset{3}{Y}z^3 ..... + \overset{n}{Y}z^n + K = o$$

sämmtliche Glieder, welche höhere Potenzen des noch zu suchenden Theils z enthalten, als unerheblich zu übersehen und sich auf die Gleichung $\overset{0}{Y} + \overset{1}{Y}z + K = o$ zu beschränken, aus welcher der Näherungswerth

$$z = \left(\frac{-K - \overset{0}{Y}}{\overset{1}{Y}}\right), \text{ d.i. } = \frac{-K - (y^n + Ay^{n-1} + By^{n-2} + \text{etc.})}{ny^{n-1} + (n-1)Ay^{n-2} + (n-2)By^{n-3}}.$$

sich ergiebt, der in jedem speciellen Falle leicht zu berechnen ist. So folgt die nähere Bestimmung der Wurzel 0,302.. im obigen Beispiele einer biquadratischen Gleichung aus

$$z = \frac{-1 - (y^4 + 8y^3 + 13y^2 - 8y)}{4y^3 + 24y^2 + 26y - 8} = \frac{-1 + 1{,}001682}{2{,}171064}$$

d. i. = 0,000774...; also b vollständiger = 0,302774....

so findet man bei der Substitution ganzer Zahlen nur für die Werthe -3, -4 und -5, -6 eine Zahlenabwechselung. Zwei andere reelle Wurzeln können aber zwischen irgend zwei benachbarten ganzen Zahlen, und weil das Product aller $=1$ ist, ächte Brüche oder zwischen o und 1 enthalten seyn. In der That finden wir durch Substitution von Decimalbrüchen:

X_0	$X_{0,1}$	$X_{0,2}$	$X_{0,3}$	$X_{0,4}$
$+1$	$+0,3381$	$-0,0144$	$-0,0059$	$+04176$

also zwischen 0,1 und 0,2 eine dritte, und zwischen 0,3 und 0,4 eine vierte reelle Wurzel der Gleichung. In Folgendem ist die nähere Berechnung dieser Wurzeln ausgeführt, welcher die Form:

$$\overset{0}{Y} + \overset{1}{Y}z + \overset{2}{Y}z^2 + \overset{3}{Y}z^3 + z^4 + 1 = o$$

oder $(y^4 + 8y^3 + 13y^2 - 8y) + (4y^3 + 24y^2 + 26y - 8)z + (6y^2 + 24y + 13)z^2 + (4y + 8)z^3 + z^4 = -1$

zum Grunde gelegt werden muß.

1) $-1 \parallel +0,192\ldots = a.$

$\overset{0}{Y} = -0,6619$

$(-0,33810000)$

Nebenrechnungen.

$\overset{1}{Y}z = -0,46404$	$\overset{1}{Y} = -5,156$	$\cdot 0,09 = -0,46404$
$\overset{2}{Y}z^2 = +0,125226$	$\overset{2}{Y} = +0,125226$	$\cdot 0,0081 = +0,125226$
$\overset{3}{Y}z^3 = +0,0061236$	$\overset{3}{Y} = +8,4$	$\cdot 0,000729 = +0,0061236$
$z^4 = +0,00006561$		
$-0,33262479$		

$(-0,005475210000)$

$\overset{1}{Y}z = -0,004332328$ etc.	$\overset{1}{Y} = -2,166164$	$\cdot 0,002 = -0,004332328$

2) $-1 \parallel +0,302\ldots = b.$

$\overset{0}{Y} = -1,0059$

$(+0,005900000000$

Nebenrechnungen.

$\overset{1}{Y}z = +0,004136$	$\overset{1}{Y} = +2,068$	$\cdot 0,002$
$\overset{2}{Y}z^2 = +0,00008296$	$\overset{2}{Y} = 20,74$	$\cdot 0,000004$
$\overset{3}{Y}z^3 = +0,000000073616$	$\overset{3}{Y} = 9,2$	$\cdot 0,000000008$
$+0,004219033616$		

$(+0,001680966384)$

Zieht man nun von dem widerstreitend genommenen Coefficient. des zweiten Gliedes $a+b$, d. h. von -8 den Werth 0,494.. ab, so ist $c+d=-8{,}494..$, und dividirt man a. b in das absolute Glied, d. h. 0,057984 in 1, so wird der Quotient $17{,}144... = c.\ d.$ Folglich ist (nach §. 207)

3) $c = \frac{1}{2}(-8{,}494+\sqrt{72{,}146-68{,}576}) = -3{,}302...$

4) $d = \frac{1}{2}(-8{,}494-\sqrt{72{,}146-68{,}576}) = -5{,}192...$

209. Nähere Bestimmung der Wurzeln. Sollen die Zahlenwerthe der Wurzeln einer gegebenen numerischen Gleichung um noch mehrere (etwa die doppelte Menge der bereits berechneten) Decimalstellen genauer bestimmt werden, so ist ein einfacheres Divisionsverfahren anwendbar, welches im Vergleich der ursprünglichen Wurzelberechnung beträchtliche Erleichterung gewährt. Je niedriger nämlich der Rang der zuletzt gefundenen Ziffer ist, um so mehr ist man berechtigt, in der Gleichung

$$\overset{0}{Y}+\overset{1}{Y}z+\overset{2}{Y}z^2+\overset{3}{Y}z^3.....+\overset{n}{Y}z^n+K=o$$

sämmtliche Glieder, welche höhere Potenzen des noch zu suchenden Theils z enthalten, als unerheblich zu übersehen und sich auf die Gleichung $\overset{0}{Y}+\overset{1}{Y}z+K=o$ zu beschränken, aus welcher der Näherungswerth

$$z=\left(\frac{-K-\overset{0}{Y}}{\overset{1}{Y}}\right), \text{ d.i. } =\frac{-K-(y^n+Ay^{n-1}+By^{n-2}+\text{etc.})}{ny^{n-1}+(n-1)Ay^{n-2}+(n-2)By^{n-3}\cdot}$$

sich ergiebt, der in jedem speciellen Falle leicht zu berechnen ist. So folgt die nähere Bestimmung der Wurzel 0,302.. im obigen Beispiele einer biquadratischen Gleichung aus

$$z=\frac{-1-(y^4+8y^3+13y^2-8y)}{4y^3+24y^2+26y-8}=\frac{-1+1{,}001682}{2{,}171064}$$

d. i. $= 0{,}000774...$; also b vollständiger $= 0{,}302774...$

Anhang
über die Cardanische Regel.

1. Algebraische Auflösung cubischer Gleichungen.

Eine Gleichung des dritten Grades von der allgemeinen Form $x^3+Ax^2+Bx+K=0$ algebraisch, d. h. unabhängig von den speciellen Werthen ihrer Coefficienten aufzulösen, setze man $x=y+z$, und bestimme den Werth von y so, daß in der Entwickelung:

$$(1)\quad (y^3+Ay^2+By+K)+(3y^2+2Ay+B)z+(3y+A)z^2+z^3=0$$

der Coefficient von z^2, d. i. $3y+a=0$ werde. Dieß geschieht, wenn $y=-\frac{1}{3}A$, und die Gleichung wird durch Einführung dieses Werthes:

$$2)\quad (\tfrac{2}{27}A^3-\tfrac{1}{3}AB+K)+(B-\tfrac{1}{3}A^2)z+z^3=0.$$

oder in kürzerer Andeutung:

$$(3)\quad z^3+Pz+Q=0.$$

Nunmehr setze man $z=\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}$, unter α und β gewisse Zahlenwerthe verstehend, die auf irgend eine, noch zu entdeckende Weise mit den bekannten Größen P und Q zusammen hängen, so wird:

$$z^3=\alpha+3\sqrt[3]{\alpha^2}.\sqrt[3]{\beta}+3\sqrt[3]{\alpha}.\sqrt[3]{\beta^2}+\beta$$
$$=(\alpha+\beta)+3\sqrt[3]{\alpha.\beta}.\left(\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}\right)=(\alpha+\beta)+3\sqrt[3]{\alpha\beta}.z$$

Also erhält die Gleichung die neue Gestalt:

$$(4)\quad (\alpha+\beta)+(3\sqrt[3]{\alpha\beta}+P)z+Q=0.$$

Offenbar wird dieser Gleichung Gnüge geschehen, wenn $\alpha+\beta+Q=0$ und zugleich $3\sqrt[3]{\alpha\beta}+P=0$ ist. Hiernach wäre

$$\alpha+\beta=-Q \text{ und } \alpha\beta=\tfrac{4}{27}P^3$$

und (nach 104 A. 6) $\alpha=\frac{1}{2}\left(-Q+\sqrt{Q^2+\frac{4}{27}P^3}\right)$

$$\beta=\frac{1}{2}\left(-Q-\sqrt{Q^2+\frac{4}{27}P^3}\right)$$

Also findet man als algebraischen Ausdruck der Wurzel:

$$(5)\quad z=\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}\left(-Q+\sqrt{Q^2+\tfrac{4}{27}P^3}\right)}+\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}\left(-Q-\sqrt{Q^2+\tfrac{4}{27}P^3}\right)}$$

Wenn die Größe $Q^2+\frac{4}{27}P^2$ negativ $=-R$ sein sollte, so erhält man einen imaginären Ausdruck für die Wurzel z, der sich indessen in einen reellen verwandelt, sobald man seine beiden Theile nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt, indem aus den Reihen für

$$\left(-\tfrac{1}{2}Q+\tfrac{1}{2}\sqrt{R}.i\right)^{\frac{1}{3}}+\left(-\tfrac{1}{2}Q-\tfrac{1}{2}\sqrt{R}.i\right)^{\frac{1}{3}}$$

unter einer der Formen

$$(1)\quad \left(-\tfrac{1}{2}Q\right)^{\frac{1}{3}}\left\{\left(1-\frac{\sqrt{R}}{Q}i\right)^{\frac{1}{3}}+\left(1+\frac{\sqrt{R}}{Q}i\right)^{\frac{1}{3}}\right\}$$

$$(2)\quad \left(\sqrt{R}i\right)^{\frac{1}{3}}\left\{\left(1+\frac{Q}{\sqrt{R}}i\right)^{\frac{1}{3}}-\left(1-\frac{Q}{\sqrt{R}}i\right)^{\frac{1}{3}}\right\}$$

der Factor i (nach 181 A. 4 u. 5) völlig verschwindet.

II. Algebraische Auflösung biquadratischer Gleichungen.

Sei die aufzulösende Gleichung des vierten Grades von der allgemeinen Form $x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+K=0$, so verwandelt sie sich, wenn man $(x-\frac{1}{4}A)$ für x substituirt in eine viergliedrige der Form

$$(1)\quad z^4+Pz^2+Qz+R=0.$$

Betrachtet man nun diese Gleichung als Product der beiden quadratischen

$$(z^2+az+b)=0, \qquad (z^2-az+c)=0,$$

so findet man durch Multiplication:

$$(2)\quad z^4+(b+c-a^2)z^2+(ac-ab)z+bc=0.$$

und durch Gleichsetzung dieses Ausdrucks mit (1):

$$b+c-a^2=P;\quad ac-ab=Q;\quad bc=R;$$

Daraus folgt, weil $c+b=P+a^2$ und $c-b=\frac{Q}{a}$ ist:

$$c=\tfrac{1}{2}\left(P+a^2+\frac{Q}{a}\right) \text{ und } b=\tfrac{1}{2}\left(P+a^2-\frac{Q}{a}\right)$$

$$\text{also } b.c \text{ oder } R=\tfrac{1}{4}\left(P^2+2Pa^2+a^4-\frac{Q^2}{a^2}\right)$$

Dieser Ausdruck giebt nach einiger Umgestaltung

(3) $a^6+2Pa^4+(P^2-4R)a^2-Q^2=0$,

oder wenn man $a^2=w$ setzt:

$$w^3+2Pw^2+(P^2-4R)w-Q^2=0,$$

mithin eine cubische Gleichung, durch deren Auflösung vermittelst der Cardanischen Regel man a, b, c entdeckt, und alsdann die gegebene biquadratische Gleichung in ihren beiden Factoren ohne Mühe auflösen kann.

Sechstes Kapitel.

Die Auflösung unbestimmter Gleichungen.

210. Unbestimmte Analysis. Enthält die aufzulösende Gleichung statt einer einzigen, zwei oder mehrere unbekannte Größen, so erscheinen die Werthe derselben völlig unbestimmt, und es ließen sich, wenn man neben ganzen und positiven auch gebrochene und negative Zahlenwerthe gestatten wollte, deren beliebige für die unbekannten Größen mit Ausschluß einer annehmen, und daraus die zugehörigen Werthe für diese eine jedesmal berechnen. Da aber die unbegränzte Anzahl solcher Auflösungen oder die unendliche Menge correspondirender Zahlenwerthe der unbekannten Größen eben so wenig Gegenstand allgemeiner Betrachtung sein kann, als in besondern Fällen, wo dergleichen unbestimmte Gleichungen auftreten, gestattet sein würde, so beschränkt man sich bei ihrer Auflösung auf ganze und positive Zahlenwerthe, die — wenn sie überhaupt möglich sind — in bestimmter Anzahl, oder auch in unendlicher Menge vorkommen können. Derjenige Zweig der Arithmetik, der sich ausschließlich mit der Auflösung unbestimmter Gleichungen beschäftigt, führt davon den Namen der unbestimten Analysis und beruht wegen

der Forderung ganzer Zahlenwerthe der unbekannten Größen so wesentlich auf den Untersuchungen über Theilbarkeit der Zahlen, daß davon, so wie von den Kettenbrüchen, deren Eigenschaften, bei der Auflösung benutzt werden können, einleitend das Nothwendigste mitgetheilt werden muß.

I. Von der Theilbarkeit der Zahlen.

211. Theilbarkeit der Summen. Nennt man eine ganze Zahl (Z) dann durch eine andere (k) theilbar, wenn sie ein 0, 1, 2, 3, 4 ... n faches derselben ist, so wird jede Summe $Z = a+b+c+d+$ etc. durch k theilbar sein, wenn die Summe der vereinigten Reste ihrer einzelnen Glieder es ist. Denn setzt man die Näherungswerthe der Quotienten in ganzen Zahlen:

$\frac{a}{k} = A$, $\frac{b}{k} = B$, $\frac{c}{k} = C$, ... und die Reste $= \alpha, \beta, \gamma ..$

so ist $a+b+c+d .. = (A+B+C ..)k + (\alpha+\beta+\gamma ..)$ folglich Z durch k theilbar, wenn nur das letzte, aus den summirten Resten bestehende, Glied es ist.

Soll nun die Theilbarkeit der Zahlen in Beziehung auf gewisse Divisoren für ein bestimmtes Zahlensystem untersucht werden, so wird sich jede, nach demselben gebildete Zahl, deren Ziffern allgemein mit abc....def bezeichnet werden mögen, als eine Summe betrachten lassen, deren Theile dem Range nach verschieden, nämlich fortlaufend um eins niedriger sind. Ihre allgemeinste Form ist demnach

$$Z = a.10^n + b.10^{n-1} + c.10^{n-2} ... d.10^2 + e.10^1 + f.10^0$$

Denkt man sich nun die Division durch eine gegebene ganze Zahl k an allen höheren Einheiten vorgenommen und die Quotienten durch A, B, C, .. die Reste hingegen durch $\alpha, \beta, \gamma ..$ bezeichnet, so entstehen die Gleichungen:

10^n	$= Ak + \alpha$	also	a. $10^n = aAk + a\alpha$
10^{n-1}	$= Bk + \beta$		b. $10^{n-1} = bBk + b\beta$
10^{n-2}	$= Ck + \gamma$		c. $10^{n-2} = cCk + c\gamma$
.			.
.			.
.			.
.			.
10^2	$= Dk + \delta$		d. $10^2 = dDk + d\delta$
10^1	$= Ek + \varepsilon$		e. $10^1 = eEk + e\varepsilon$
10^0	$= .... 1$		f. $10^0 = ... f.$

und durch Summation derselben das Endresultat:

$$abc..def=(aA+bB..+eE)k+(a\alpha+b\beta..+e\varepsilon+f)$$

Also wird jede, in einem bestimmten Zahlensysteme gegebene Zahl Z durch eine andere k dann theilbar sein, wenn die Summe der Producte aus den einzelnen Ziffern in die, durch Division von K in die Einheit ihrer Stellen entstehenden, Reste dadurch theilbar ist.

212. Anwendung auf das Decimalsystem. Die Regeln für die Prüfung der Theilbarkeit einer gegebenen Zahl hängen zunächst von der Grundzahl des Systems ab, wie denn z. B. alle durch Sieben theilbare Zahlen augenblicklich erkennbar sind, wenn man nach dem heptadischen Systeme rechnen und folglich die Potenzen von Sieben $=10, 100, 1000$ .... schreiben will, während sie in dekadisch gebildeten Zahlen nur mit Mühe erkannt werden. Viel einfacher läßt sich die Theilbarkeit solcher durch 2, 4, 8... : 3, 6, 9 beurtheilen, wie aus folgender Anwendung des obigen allgemeinen Satzes hervorgehen wird. Es sei nämlich:

1) $k=2$; so ist $\alpha, \beta, \gamma \ldots \varepsilon=0$, also Z theilbar, wenn die letzte Ziffer f es ist
2) $k=3$; so ist $\alpha, \beta, \gamma \ldots \varepsilon=1$, also Z theilbar, wenn die Quersumme der Ziffern $(a+b+c \ldots +f)$ ein Vielfaches von 3 ist.
3) $k=4$, so ist $\alpha, \beta, \ldots \delta=0$ und $\varepsilon=2$, also Z theilbar wenn $(2e=f)$ es ist:
4) $k=5$; so ist $\alpha, \beta, \gamma \ldots \varepsilon=0$, also Z divisibel, wenn f es ist.
5) $k=6$, so ist $\alpha, \beta, \gamma \ldots \varepsilon=4$, also Z theilbar, wenn $4(a+b+c \ldots +e)+f$ es ist.
6) $k=7$; so ist die, sich immer wiederholende, Reihenfolge der Reste: 5, 4, 6, 2, 3, 1, also Z divisibel, wenn $(\ldots 5a+4b+6c+2d+3e+f)$ es ist.
7) $k=8$; so ist $\varepsilon=2$, $\delta=4$ und jeder höhere Rest $=0$, also Z theilbar, wenn $(4d+2\varepsilon+f)$ es ist.
8) $k=9$; so ist $\alpha, \beta, \gamma \ldots \varepsilon=1$, also Z divisibel, wenn die Quersumme $(a+b+c \ldots +f)$ es ist.

213. Theilbarkeit der Differenzen. Damit eine Differenz $(a-b)$ durch die Zahl k theilbar sei, muß der

Unterschied der bei $\frac{a}{k}$ und $\frac{b}{k}$ gebliebenen Reste $(\alpha-\beta)$ es sein. Denn setzt man:

$$a = Ak + \alpha \quad \text{und} \quad b = Bk + \beta,$$

so ist $a-b=(A-B)\,k+(\alpha-\beta)$, also nur dann durch k divisibel, wenn $\alpha-\beta$ es ist.

214. Theilbarkeit der Producte. Eben so kann das Product beliebiger Zahlen a, b, c, ... f, wenn einzelne Factoren desselben nicht ohnehin durch k divisibel sind, nur dann durch diese Zahl getheilt werden, wenn das Product der Reste $\alpha.\beta.\gamma...\varepsilon.\varphi$ gleiches gestattet. Denn es sei $a=Ak+\alpha$, $b=Bk+\beta$, ..$f=Fk+\varphi$, so gibt die Multiplication dieser Formen (nach §. 172) eine nach den Potenzen von k fortschreitende Reihe, deren absolutes Glied $=\alpha.\beta.\gamma..\varphi$ ist, als Werth von a. b. c..f. Da in derselben alle übrigen Glieder k zum Factor haben, so hängt von ihm allein die Theilbarkeit des ganzen Products ab.

Denkt man sich unter k eine Primzahl, so entsteht durch die Multiplication der (nothwendig kleineren) Reste $\alpha, \beta, \gamma..\varphi$ eine zusammengesetzte Zahl, von welcher k, als unzerlegbar, nicht Factor sein kann. Daraus folgt, in Rücksicht auf den obigen Satz, daß, wenn die einzelnen Factoren nicht durch eine Primzahl k theilbar sind, auch ihr Product es nicht sein könne.

215. Theilbarkeit der Potenzen. Um zu prüfen, ob irgend eine Potenz Z^n durch k getheilt werden könne, darf man nur den — durch Division von Z durch k sich ergebenden — Rest auf die vorgeschriebene Potenz erheben und durch k dividiren. Denn wird $Z=mk+h$ gesetzt, so ist $Z^n=(mk)^n+n.(mk)^{n-1}.h\ldots+(mk)h+h^n$, folglich dann durch k theilbar, wenn h^n es ist. So kann z. B. 5138^5 durch 8 getheilt worden, weil in $5138^5=(8.642+2)^5$ das letzte Glied der unentwickelten Reihe, $2^5=32$, durch 8 theilbar ist; nicht so hingegen $5238^3=(8.654+6)^3$, weil die Entwickelung dieses Ausdruckes mit $6^3=216$ schließt.

Den erſten Theil der Wurzel $y=4$ ſetzend, findet man dann die folgenden Ziffern ſucceſſiv, indem man zu dem jedesmal bekannten y ein neues z ſucht, wie in folgender Ausführung der Rechnung:

$$\begin{array}{r|l} -100 & 4{,}1452\ldots \\ {}^{0}Y=-96 & \\ \hline (-4000) & \end{array}$$

Nebenrechnungen.

$$\begin{array}{ll} {}^{1}Yz=-2{,}8 & {}^{1}Y=-28 \mid .\ 0{,}1=-2{,}8 \\ {}^{2}Yz^2=+0{,}03 & {}^{2}Y=3 \mid .\ 0{,}01=0{,}03 \\ z^3=+0{,}001 & \\ \hline -2{,}769 & \\ \hline (-1{,}231000) & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} {}^{1}Yz=-1{,}0948 & {}^{1}Y=-27{,}37 \mid .\ 0{,}04=-1{,}0948 \\ {}^{2}Yz^2=+0{,}00528 & {}^{2}Y=3{,}3 \mid .\ 0016=0{,}00528 \\ z^3=+0{,}000064 & \\ \hline -1{,}089456 & \\ \hline (-0{,}141544000) & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} {}^{1}Yz=-0{,}1355060 & {}^{1}Y=-27{,}1012 \mid .\ 0{,}005=0{,}1355060 \\ {}^{2}Yz^2=+0{,}00008550 & {}^{2}Y=3{,}42 \mid .\ 0{,}000025 \\ & \qquad =0{,}0008550 \\ z^3=+0{,}000000125. & \\ \hline -0{,}135420375 & \\ \hline (-0{,}006123625) & \end{array}$$

Die beiden andern Wurzeln, deren eine zwiſchen 7 und 8, die andere zwiſchen -3 und -4 fällt, könnten auf die nämliche Weiſe berechnet werden. Hat man aber eine reelle Wurzel einer cubiſchen Gleichung hinlänglich genau beſtimmt, ſo iſt es zweckmäßiger, die übrigen beiden, zumal da dieſe vielleicht imaginär ſind, auf nachfolgendem Wege zu beſtimmen.

207. Reduction cubiſcher Gleichungen. Iſt für eine Gleichung des dritten Grades, deren Wurzeln mit a, b, c bezeichnet werden mögen, ſo daß ſie (nach §. 197) unter die allgemeine Form

$$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x=abc$$

fällt, eine Wurzel a bekannt, so hat man dadurch auch die Summe und das Product der beiden noch unbekannten, indem man vom Coefficienten des zweiten Gliedes mit verändertem Zeichen genommen, a subtrahirt und das absolute Glied durch a dividirt. Werde jene mit S, dieses mit P bezeichnet, so finden sich b und c durch Auflösung der beiden Gleichungen $b+c=S$ und $b \cdot c=P$ (nach §. 104 A. 6) ausgedrückt in den Formeln:

$$b = \tfrac{1}{2}(S+\sqrt{S^2-4P})$$
$$c = \tfrac{1}{2}(S-\sqrt{S^2-4P})$$

Ist a eine rationale Zahl, so hätte man kürzer die gegebene Gleichung durch ihren Factor $(x-a)$ dividiren können. In jedem Falle wird ihre vollständige Auflösung ohne Mühe auf die einer quadratischen Gleichung zurückgeführt, sobald eine Wurzel bekannt geworden. In der oben angeführten Gleichung $x^3-9x^2-4x+100=0$, wofür die Wurzel 4, 1452... unmittelbar gesucht ist, findet man $S=+9-4,1452 = 4,8548$; und $P=\frac{-100}{4,1452\ldots}=-24,1242$; folglich ist

$$b = \tfrac{1}{2}(4,8548+\sqrt{23,5691+96,4968}) = +7,9061..$$
$$c = \tfrac{1}{2}(4,8548-\sqrt{23,5691+96,4968}) = -3,0513..$$

Man sieht leicht ein, daß auf dem nämlichen Wege jede Gleichung, allgemein vom n^{ten} Grade, auf eine quadratische sich reduciren läßt, sobald $(n-2)$ Wurzeln derselben bereits bekannt geworden sind.

208. Auflösung biquadratischer Gleichungen. Hat man sich bei einer Gleichung des vierten Grades von dem Dasein einer reellen Wurzel überzeugt, so muß wenigstens eine solche vorhanden sein und nach der Berechnung beider läßt sich die gegebene Gleichung auf eine quadratische reduciren, indem man sie entweder durch $(x-a)(x-b)$ dividirt, oder $(a+b)$ von dem, mit verändertem Zeichen genommenen Coefficienten des zweiten Gliedes abzieht, um $S=c+d$; und ab in das absolute Glied dividirt, um $P=c.d$ zu erhalten, worauf die obigen Formeln wieder zur Anwendung kommen.

Sei die gegebene biquadratische Gleichung:

$$x^4+8x^3+13x^2-8x+1=0,$$

so findet man bei der Substitution ganzer Zahlen nur für die Werthe -3, -4 und -5, -6 eine Zahlenabwechselung. Zwei andere reelle Wurzeln können aber zwischen irgend zwei benachbarten ganzen Zahlen, und weil das Product aller $=1$ ist, ächte Brüche oder zwischen 0 und 1 enthalten seyn. In der That finden wir durch Substitution von Decimalbrüchen:

X_0	$X_{0,1}$	$X_{0,2}$	$X_{0,3}$	$X_{0,4}$
$+1$	$+0,3381$	$-0,0144$	$-0,0059$	$+04176$

also zwischen 0,1 und 0,2 eine dritte, und zwischen 0,3 und 0,4 eine vierte reelle Wurzel der Gleichung. In Folgendem ist die nähere Berechnung dieser Wurzeln ausgeführt, welcher die Form:

$$\overset{0}{Y} + \overset{1}{Y}z + \overset{2}{Y}z^2 + \overset{3}{Y}z^3 + z^4 + 1 = 0$$

oder $(y^4 + 8y^3 + 13y^2 - 8y) + (4y^3 + 24y^2 + 26y - 8)z + (6y^2 + 24y + 13)z^2 + (4y + 8)z^3 + z^4 = -1$

zum Grunde gelegt werden muß.

1) $-1 \parallel +0,192\ldots = a.$

$\overset{0}{Y} = -0,6619$

$(-0,33810000)$

Nebenrechnungen.

$\overset{1}{Y}z = -0,46404$	$\overset{1}{Y} = -5,156$	$\cdot 0,09 =$	$-0,46404$
$\overset{2}{Y}z^2 = +0,125226$	$\overset{2}{Y} = +0,125226$	$\cdot 0,0081 =$	$+0,125226$
$\overset{3}{Y}z^3 = +0,0061236$	$\overset{3}{Y} = +8,4$	$\cdot 0,000729 =$	$+0,0061236$
$z^4 = +0,00006561$			
$-0,33262479$			

$(-0,005475210000)$

$\overset{1}{Y}z = -0,004332328$ etc.	$\overset{1}{Y} = -2,166164$	$\cdot 0,002 =$	$-0,004332328$

2) $-1 \parallel +0,302\ldots = b.$

$\overset{0}{Y} = -1,0059$

$(+0,005900000000$

Nebenrechnungen.

$\overset{1}{Y}z = +0,004136$	$\overset{1}{Y} = +2,068$	$\cdot 0,002$	
$\overset{2}{Y}z^2 = +0,00008296$	$\overset{2}{Y} = 20,74$	$\cdot 0,000004$	
$\overset{3}{Y}z^3 = +0,000000073616$	$\overset{3}{Y} = 9,2$	$\cdot 0,000000008$	
$+0,004219033616$			

$(+0,001680966384)$

Zieht man nun von dem widerstreitend genommenen Coefficient. des zweiten Gliedes a+b, d. h. von −8 den Werth 0,494.. ab, so ist c+d=−8,494.., und dividirt man a. b in das absolute Glied, d. h. 0,057984 in 1, so wird der Quotient 17,144... = c. d. Folglich ist (nach §. 207)

3) $c = \frac{1}{2}(-8{,}494 + \sqrt{72{,}146 - 68{,}576}) = -3{,}302...$

4) $d = \frac{1}{2}(-8{,}494 - \sqrt{72{,}146 - 68{,}576}) = -5{,}192...$

209. **Nähere Bestimmung der Wurzeln.** Sollen die Zahlenwerthe der Wurzeln einer gegebenen numerischen Gleichung um noch mehrere (etwa die doppelte Menge der bereits berechneten) Decimalstellen genauer bestimmt werden, so ist ein einfacheres Divisionsverfahren anwendbar, welches im Vergleich der ursprünglichen Wurzelberechnung beträchtliche Erleichterung gewährt. Je niedriger nämlich der Rang der zuletzt gefundenen Ziffer ist, um so mehr ist man berechtigt, in der Gleichung

$$\overset{0}{Y} + \overset{1}{Y}z + \overset{2}{Y}z^2 + \overset{3}{Y}z^3 ..... + \overset{n}{Y}z^n + K = o$$

sämmtliche Glieder, welche höhere Potenzen des noch zu suchenden Theils z enthalten, als unerheblich zu übersehen und sich auf die Gleichung $\overset{0}{Y} + \overset{1}{Y}z + K = o$ zu beschränken, aus welcher der Näherungswerth

$$z = \left(\frac{-K-\overset{0}{Y}}{\overset{1}{Y}}\right), \text{ d.i. } = \frac{-K-(y^n + Ay^{n-1} + By^{n-2} + \text{etc.})}{ny^{n-1} + (n-1)Ay^{n-2} + (n-2)By^{n-3}}.$$

sich ergiebt, der in jedem speciellen Falle leicht zu berechnen ist. So folgt die nähere Bestimmung der Wurzel 0,302.. im obigen Beispiele einer biquadratischen Gleichung aus

$$z = \frac{-1-(y^4 + 8y^3 + 13y^2 - 8y)}{4y^3 + 24y^2 + 26y - 8} = \frac{-1 + 1{,}001682}{2{,}171064}$$

d. i. = 0,000774...; also b vollständiger = 0,302774...

Anhang
über die Cardanische Regel.

1. Algebraische Auflösung cubischer Gleichungen.

Eine Gleichung des dritten Grades von der allgemeinen Form $x^3+Ax^2+Bx+K=0$ algebraisch, d. h. unabhängig von den speciellen Werthen ihrer Coefficienten aufzulösen, setze man $x=y+z$, und bestimme den Werth von y so, daß in der Entwickelung:

$$(1)\quad (y^3+Ay^2+By+K)+(3y^2+2Ay+B)z+(3y+A)z^2+z^3=0$$

der Coefficient von z^2, d. i. $3y+a=0$ werde. Dieß geschieht, wenn $y=-\frac{1}{3}A$, und die Gleichung wird durch Einführung dieses Werthes:

$$2)\quad (\tfrac{2}{27}A^3-\tfrac{1}{3}AB+K)+(B-\tfrac{1}{3}A^2)z+z^3=0.$$

oder in kürzerer Andeutung:

$$(3)\quad z^3+Pz+Q=0.$$

Nunmehr setze man $z=\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}$, unter α und β gewisse Zahlenwerthe verstehend, die auf irgend eine, noch zu entdeckende Weise mit den bekannten Größen P und Q zusammen hängen, so wird:

$$z^3=\alpha+3\sqrt[3]{\alpha^2}.\sqrt[3]{\beta}+3\sqrt[3]{\alpha}.\sqrt[3]{\beta^2}+\beta$$
$$=(\alpha+\beta)+3\sqrt[3]{\alpha.\beta}.\left(\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}\right)=(\alpha+\beta)+3\sqrt[3]{\alpha\beta}.z$$

Also erhält die Gleichung die neue Gestalt:

$$(4)\quad (\alpha+\beta)+(3\sqrt[3]{\alpha\beta}+P)z+Q=0.$$

Offenbar wird dieser Gleichung Gnüge geschehen, wenn $\alpha+\beta+Q=0$ und zugleich $3\sqrt[3]{\alpha\beta}+P=0$ ist. Hiernach wäre

$$\alpha+\beta=-Q \text{ und } \alpha\beta=\tfrac{1}{27}P^3$$

und (nach 104 A. 6) $\alpha=\frac{1}{2}(-Q+\sqrt{Q^2+\frac{4}{27}P^3})$

$$\beta=\frac{1}{2}(-Q-\sqrt{Q^2+\frac{4}{27}P^3})$$

Also findet man als algebraischen Ausdruck der Wurzel:

$$(5)\quad z=\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}(-Q+\sqrt{Q^2+\tfrac{4}{27}P^3})}+\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}(-Q-\sqrt{Q^2+\tfrac{4}{27}P^3})}$$

Wenn die Größe $Q^2+\frac{4}{27}P^2$ negativ $=-R$ sein sollte, so erhält man einen imaginären Ausdruck für die Wurzel z, der sich indessen in einen reellen verwandelt, sobald man seine beiden Theile nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt, indem aus den Reihen für

$$(-\tfrac{1}{2}Q+\tfrac{1}{2}\sqrt{R}.i)^{\frac{1}{3}}+(-\tfrac{1}{2}Q-\tfrac{1}{2}\sqrt{R}.i)^{\frac{1}{3}}$$

unter einer der Formen

$$(1)\quad (-\tfrac{1}{2}Q)^{\frac{1}{3}}\left\{(1-\frac{\sqrt{R}}{Q}i)^{\frac{1}{3}}+(1+\frac{\sqrt{R}}{Q}i)^{\frac{1}{3}}\right\}$$

$$(2)\quad (\sqrt{R}i)^{\frac{1}{3}}\left\{(1+\frac{Q}{\sqrt{R}}i)^{\frac{1}{3}}-(1-\frac{Q}{\sqrt{R}}i)^{\frac{1}{3}}\right\}$$

der Factor i (nach 181 A. 4 u. 5) völlig verschwindet.

II. Algebraische Auflösung biquadratischer Gleichungen.

Sei die aufzulösende Gleichung des vierten Grades von der allgemeinen Form $x^4+Ax^3+Bx+^2Cx+K=o$, so verwandelt sie sich, wenn man $(x-\frac{1}{4}A)$ für x substituirt in eine viergliedrige der Form

$$(1)\quad z^4+Pz^2+Qz+R=o.$$

Betrachtet man nun diese Gleichung als Product der beiden quadratischen

$$(z^2+az+b)=o, \qquad (z^2-az+c)=o,$$

so findet man durch Multiplication:

$$(2)\quad z^4+(b+c-a^2)z^2+(ac-ab)z+bc=o.$$

und durch Gleichsetzung dieses Ausdrucks mit (1):

$$b+c-a^2=P;\quad ac-ab=Q;\quad bc=R;$$

Daraus folgt, weil $c+b=P+a^2$ und $c-b=\frac{Q}{a}$ ist:

$$c=\tfrac{1}{2}\left(P+a^2+\frac{Q}{a}\right) \text{ und } b=\tfrac{1}{2}\left(P+a^2-\frac{Q}{a}\right)$$

$$\text{also } b.c \text{ oder } R=\tfrac{1}{4}\left(P^2+2Pa^2+a^4-\frac{Q^2}{a^2}\right)$$

Dieser Ausdruck giebt nach einiger Umgestaltung

(3) $a^6+2Pa^4+(P^2-4R)a^2-Q^2=0$,

oder wenn man $a^2=w$ setzt:

$$w^3+2Pw^2+(P^2-4R)w-Q^2=0,$$

mithin eine cubische Gleichung, durch deren Auflösung vermittelst der Cardanischen Regel man a, b, c entdeckt, und alsdann die gegebene biquadratische Gleichung in ihren beiden Factoren ohne Mühe auflösen kann.

Sechstes Kapitel.

Die Auflösung unbestimmter Gleichungen.

210. Unbestimmte Analysis. Enthält die aufzulösende Gleichung statt einer einzigen, zwei oder mehrere unbekannte Größen, so erscheinen die Werthe derselben völlig unbestimmt, und es ließen sich, wenn man neben ganzen und positiven auch gebrochene und negative Zahlenwerthe gestatten wollte, deren beliebige für die unbekannten Größen mit Ausschluß einer annehmen, und daraus die zugehörigen Werthe für diese eine jedesmal berechnen. Da aber die unbegränzte Anzahl solcher Auflösungen oder die unendliche Menge correspondirender Zahlenwerthe der unbekannten Größen eben so wenig Gegenstand allgemeiner Betrachtung sein kann, als in besondern Fällen, wo dergleichen unbestimmte Gleichungen auftreten, gestattet sein würde, so beschränkt man sich bei ihrer Auflösung auf ganze und positive Zahlenwerthe, die — wenn sie überhaupt möglich sind — in bestimmter Anzahl, oder auch in unendlicher Menge vorkommen können. Derjenige Zweig der Arithmetik, der sich ausschließlich mit der Auflösung unbestimmter Gleichungen beschäftigt, führt davon den Namen der unbestimten Analysis und beruht wegen

der Forderung ganzer Zahlenwerthe der unbekannten Größen so wesentlich auf den Untersuchungen über Theilbarkeit der Zahlen, daß davon, so wie von den Kettenbrüchen, deren Eigenschaften, bei der Auflösung benutzt werden können, einleitend das Nothwendigste mitgetheilt werden muß.

I. Von der Theilbarkeit der Zahlen.

211. Theilbarkeit der Summen. Nennt man eine ganze Zahl (Z) dann durch eine andere (k) theilbar, wenn sie ein 0, 1, 2, 3, 4 ... n faches derselben ist, so wird jede Summe $Z = a + b + c + d + \text{etc.}$ durch k theilbar sein, wenn die Summe der vereinigten Reste ihrer einzelnen Glieder es ist. Denn setzt man die Näherungswerthe der Quotienten in ganzen Zahlen:

$\frac{a}{k} = A$, $\frac{b}{k} = B$, $\frac{c}{k} = C$, ... und die Reste $= \alpha, \beta, \gamma ..$,

so ist $a + b + c + d .. = (A + B + C ..) k + (\alpha + \beta + \gamma ..)$ folglich Z durch k theilbar, wenn nur das letzte, aus den summirten Resten bestehende, Glied es ist.

Soll nun die Theilbarkeit der Zahlen in Beziehung auf gewisse Divisoren für ein bestimmtes Zahlensystem untersucht werden, so wird sich jede, nach demselben gebildete Zahl, deren Ziffern allgemein mit abc....def bezeichnet werden mögen, als eine Summe betrachten lassen, deren Theile dem Range nach verschieden, nämlich fortlaufend um eins niedriger sind. Ihre allgemeinste Form ist demnach

$$Z = a.10^n + b.10^{n-1} + c.10^{n-2} ... d.10^2 + e.10^1 + f.10^0$$

Denkt man sich nun die Division durch eine gegebene ganze Zahl k an allen höheren Einheiten vorgenommen und die Quotienten durch A, B, C, .. die Reste hingegen durch $\alpha, \beta, \gamma ..$ bezeichnet, so entstehen die Gleichungen:

10^n	$= Ak + \alpha$	also	a. 10^n	$= aAk + a\alpha$
10^{n-1}	$= Bk + \beta$		b. 10^{n-1}	$= bBk + b\beta$
10^{n-2}	$= Ck + \gamma$		c. 10^{n-2}	$= cCk + c\gamma$
.			.	
.			.	
.			.	
.			.	
10^2	$= Dk + \delta$		d. 10^2	$= dDk + d\delta$
10^1	$= Ek + \varepsilon$		e. 10^1	$= eEk + e\varepsilon$
10^0	$= .... 1$		f. 10^0	$= ..... f.$

und durch Summation derselben das Endresultat:

$$abc..def=(aA+bB..+eE)k+(a\alpha+b\beta..+e\varepsilon+f)$$

Also wird jede, in einem bestimmten Zahlensysteme gegebene Zahl Z durch eine andere k dann theilbar sein, wenn die Summe der Producte aus den einzelnen Ziffern in die, durch Division von K in die Einheit ihrer Stellen entstehenden, Reste dadurch theilbar ist.

212. Anwendung auf das Decimalsystem. Die Regeln für die Prüfung der Theilbarkeit einer gegebenen Zahl hängen zunächst von der Grundzahl des Systems ab, wie denn z. B. alle durch Sieben theilbare Zahlen augenblicklich erkennbar sind, wenn man nach dem heptadischen Systeme rechnen und folglich die Potenzen von Sieben $=10, 100, 1000$ .... schreiben will, während sie in dekadisch gebildeten Zahlen nur mit Mühe erkannt werden. Viel einfacher läßt sich die Theilbarkeit solcher durch 2, 4, 8.. : 3, 6, 9 beurtheilen, wie aus folgender Anwendung des obigen allgemeinen Satzes hervorgehen wird. Es sei nämlich:

1) $k=2$; so ist $\alpha, \beta, \gamma \ldots \varepsilon=0$, also Z theilbar, wenn die letzte Ziffer f es ist
2) $k=3$; so ist $\alpha, \beta, \gamma \ldots \varepsilon=1$, also Z theilbar, wenn die Quersumme der Ziffern $(a+b+c \ldots +f)$ ein Vielfaches von 3 ist.
3) $k=4$, so ist $\alpha, \beta, \ldots \delta=0$ und $\varepsilon=2$, also Z theilbar wenn $(2e=f)$ es ist:
4) $k=5$; so ist $\alpha, \beta, \gamma \ldots \varepsilon=0$, also Z divisibel, wenn f es ist.
5) $k=6$, so ist $\alpha, \beta, \gamma \ldots \varepsilon=4$, also Z theilbar, wenn $4(a+b+c \ldots +e)+f$ es ist.
6) $k=7$; so ist die, sich immer wiederholende, Reihenfolge der Reste: 5, 4, 6, 2, 3, 1, also Z divisibel, wenn $(\ldots 5a+4b+6c+2d+3e+f)$ es ist.
7) $k=8$; so ist $\varepsilon=2$, $\delta=4$ und jeder höhere Rest $=0$, also Z theilbar, wenn $(4d+2\varepsilon+f)$ es ist.
8) $k=9$; so ist $\alpha, \beta, \gamma \ldots \varepsilon=1$, also Z divisibel, wenn die Quersumme $(a+b+c \ldots +f)$ es ist.

213. Theilbarkeit der Differenzen. Damit eine Differenz $(a-b)$ durch die Zahl k theilbar sei, muß der

Unterschied der bei $\frac{a}{k}$ und $\frac{b}{k}$ gebliebenen Reste $(\alpha - \beta)$ es sein. Denn setzt man:

$$a = Ak + \alpha \quad \text{und} \quad b = Bk + \beta,$$

so ist $a - b = (A - B)\,k + (\alpha - \beta)$, also nur dann durch k divisibel, wenn $\alpha - \beta$ es ist.

214. Theilbarkeit der Producte. Eben so kann das Product beliebiger Zahlen a, b, c, ... f, wenn einzelne Factoren desselben nicht ohnehin durch k divisibel sind, nur dann durch diese Zahl getheilt werden, wenn das Product der Reste $\alpha . \beta . \gamma \ldots \varepsilon . \varphi$ gleiches gestattet. Denn es sei $a = Ak + \alpha$, $b = Bk + \beta$, .. $f = Fk + \varphi$, so gibt die Multiplication dieser Formen (nach §. 172) eine nach den Potenzen von k fortschreitende Reihe, deren absolutes Glied $= \alpha . \beta . \gamma \ldots \varphi$ ist, als Werth von a. b. c. . f. Da in derselben alle übrigen Glieder k zum Factor haben, so hängt von ihm allein die Theilbarkeit des ganzen Products ab.

Denkt man sich unter k eine Primzahl, so entsteht durch die Multiplication der (nothwendig kleineren) Reste $\alpha, \beta, \gamma \ldots \varphi$ eine zusammengesetzte Zahl, von welcher k, als unzerlegbar, nicht Factor sein kann. Daraus folgt, in Rücksicht auf den obigen Satz, daß, wenn die einzelnen Factoren nicht durch eine Primzahl k theilbar sind, auch ihr Product es nicht sein könne.

215. Theilbarkeit der Potenzen. Um zu prüfen, ob irgend eine Potenz Z^n durch k getheilt werden könne, darf man nur den — durch Division von Z durch k sich ergebenden — Rest auf die vorgeschriebene Potenz erheben und durch k dividiren. Denn wird $Z = mk + h$ gesetzt, so ist $Z^n = (mk)^n + n.(mk)^{n-1}.h \ldots + (mk)h + h^n$, folglich dann durch k theilbar, wenn h^n es ist. So kann z. B. 5138^5 durch 8 getheilt worden, weil in $5138^5 = (8.642 + 2)^5$ das letzte Glied der unentwickelten Reihe, $2^5 = 32$, durch 8 theilbar ist; nicht so hingegen $5238^3 = (8.654 + 6)^3$, weil die Entwickelung dieses Ausdruckes mit $6^3 = 216$ schließt.

dem hinzukommenden Bruchsnenner und füge jenem Producte den Zähler, dieſem den Nenner des vorhergehenden N. W. hinzu. Die Richtigkeit dieſes Bildungsgeſetzes erkennt man ohne Mühe für die erſten N. W.; allgemein wird ſie dadurch erwieſen, daß man unter der Vorausſetzung, der $(m)^{te}$ Näherungswerth des K. B. ſei nach demſelben gebildet, d. h. $\frac{M}{M'} = \frac{Lm+K}{L'm+K'}$, den folgenden $(n)^{ten}$ $\frac{N}{N'}$, $= \frac{Mn+L}{M'n+L'}$ findet. Dieſes geſchieht nun, indem für den unvollſtändigen Bruchsnenner m der vollſtändigere Werth $m+\frac{1}{n}$ an die Stelle geſetzt wird. Denn alsdann iſt:

$$\frac{N}{N'} = \frac{L\left(m+\frac{1}{n}\right)+K}{L'\left(m+\frac{1}{n}\right)+K'} = \frac{mnL+L+nK}{mnL'+L'+nK'}$$

$$= \frac{n(mL+K)+L}{n(mL'+K')+L'}$$

und da $(mL+K)=M$, $(mL'+K')=M'$ vorausgeſetzt wurde, ſo findet ſich das obige Geſetz allgemein beſtätigt.

Die ſucceſſiven N. W. des aus $\frac{3307}{764}$ entſtandenen Kettenbruchs, für welchen $a=4$, $b=3$, $c=22$, $d=1$, $e=4$, und $f=2$ iſt, ſind demnach:

(a) $\frac{4}{1}$, (b) $\frac{13}{3}$, (c) $\frac{13.22+4}{3.22+1} = \frac{290}{67}$, (d) $\frac{290.1+13}{67.1+3}$
$= \frac{303}{70}$, (e) $\frac{303.4+290.}{70.4+67} = \frac{1502}{347}$
(f) $\frac{1502.2+303}{347.2+70} = \frac{3307}{764}$.

218. **Differenzen der Näherungswerthe.** Wenn zwei benachbarte N. W. eines K. B. von einander abgezogen werden, ſo iſt ihr Unterſchied jedesmal ein **Stammbruch**, d. h. der Zähler deſſelben $=1$; die Bezeichnung dieſer Differenzen aber wechſelt regelmäßig ab und iſt für die N. W. von gerader Anzahl poſitiv, für die von ungerader negativ, wie ſchon der Anfang ihrer Reihe dieſes bemerklich macht:

$$(1)\quad \frac{A}{A'} - \frac{B}{B'} = \frac{AB'-BA'}{A'B'} = \frac{A(BA'+a)-A'(bA+1)}{A'B'}$$
$$= -\frac{1}{A'B'}.$$
$$(2)\quad \frac{B}{B'} - \frac{C}{C'} = \frac{BC'-CB'}{B'C'} = \frac{B(cB'+A')-B'(cB+A)}{B'C'}$$
$$= +\frac{1}{B'C'}$$

weil nämlich $BA'-AB' = -(AB'-BA') = +1$ zu setzen ist. Eben so findet man allgemein:

$$(m)\quad \frac{M}{M'} - \frac{N}{N'} = \frac{MN'-NM'}{M'N'} = \frac{M(nM'+L')-M'(nM+L)}{M'N'}$$
$$= \frac{-(LM'-ML')}{M'N'}$$

d. h. der Zähler irgend einer Differenz je zwei benachbarter N. W. ist gleich dem vorhergehenden, aber entgegengesetzt bezeichnet; und da der Zähler der ersten Differenz $= -1$ gefunden wird, so ist -1 überhaupt derjenige einer $(2n+1)^{ten}$, folglich der Zähler jedes $(2n)^{ten}$ Unterschiedes $= +1$

Die Differenzen der N. W. für den, oben berechneten, Kettenbruch bilden demnach folgende Reihe:

$$(1)\ -\frac{1}{3},\ (2)\ +\frac{1}{201},\ (3)\ -\frac{1}{4690},\ (4)\ +\frac{1}{24290},$$
$$(5)\ -\frac{1}{265108}.$$

219. Gränzen der Annäherung. Bezeichnet man den wahren Werth des K. B. mit $\frac{W}{W'}$, so ist zunächst a oder $\frac{A}{A'} \prec \frac{W}{W'}$, hingegen $a+\frac{1}{b}$ oder $\frac{B}{B'} \succ \frac{W}{W'}$ weil der Nenner b durch Vernachlässigung des angehängten Bruches zu klein ist. Sei allgemein $\frac{M}{M'} \prec \frac{W}{W'}$, so muß der folgende N. W. $\frac{N}{N'} \succ \frac{W}{W'}$ sein, weil bei'm Fortschritt vom einen zum andern für den zu kleinen K. B. Nenner m der zu große $\left(m+\frac{1}{n}\right)$ substituirt wird, der den neuen N. W. nothwendig, im ent-

gegengesetzten Sinne unrichtig oder vom wahren Werthe abweichend macht. Nur ist die Reihe der N. W. nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{A}{A'} = \frac{a}{1}; \frac{B}{B'} = \frac{A}{A'} + \frac{1}{A'B'}; \frac{C}{C'} = \frac{B}{B'} - \frac{1}{B'C'}; \text{ u. s. w.}$$

worin, weil $\frac{A}{A'} < \frac{W}{W'}$ und $\frac{B}{B'} > \frac{W}{W'}$, die Glieder von ungerader Zahl $\frac{A}{A'}, \frac{C}{C'}, \frac{E}{E'}, \ldots\ldots$ sämmtlich zu klein, die von gerader Anzahl $\frac{B}{B'}, \frac{D}{D'}, \frac{F}{F'}, \ldots\ldots$ hingegen sämmtlich zu groß sind. Der Fehler, welchen man durch Annahme eines dieser N. W. für den wirklichen des K. B. begeht, ist also, weil $\frac{W}{W'}$, zwischen je zwei benachbarten N. W. liegt, respective geringer, als

$$\frac{1}{A'B'}, \frac{1}{B'C'}, \frac{1}{C'D'}, \frac{1}{D'E'}, \text{ u. s. f.}$$

und wird um so unbedeutender, je weiter man fortschreitet wie er z. B. für den 5ten N. W. des oben gegebenen K. B. weniger, als $\frac{1}{265108}$ betragen muß.

220. N. W. großer Brüche. Vermöge der, im Vorstehenden entwickelten Sätze und Regeln kann man jeden Bruch, der durch sehr große Zahlen ausgedrückt ist, in einer Reihe einfacherer Brüche genähert darstellen, indem man (nach §. 216) die Nenner eines Kettenbruchs durch fortgesetzte Division sucht, und (nach §. 217) die successiven N. W. desselben bestimmt, deren Genauigkeit endlich aus dem Producte ihrer Nenner (nach §. 219) leicht ermessen werden kann. Sei z. B. das Verhältniß des Kreisumfanges zum Durchmesser $\frac{W}{W'} = \frac{31415926535\ldots}{10000000000\ldots}$ zur Vereinfachung des Ausdrucks gegeben, so ist der Kettenbruch

$$\frac{W}{W'} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + 1 \text{ u. s. w.}}}}}$$

also die Reihe seiner Näherungswerthe

(a) $\frac{3}{1}$, (b) $\frac{22}{7}$, (c) $\frac{333}{106}$, (d) $\frac{355}{113}$, (e) $\frac{103993}{33102}$, u. s. w.

und endlich die Reihe der Differenzen dieser N. W. oder der Fehlergränzen, die ihre größtmöglichste Abweichung vom wahren Werthe des K. B. bezeichnen:

$$\frac{1}{A'B'} = \frac{1}{7}, \frac{1}{B'C'} = \frac{1}{742}, \frac{1}{C'D'} = \frac{1}{11978}, \frac{1}{D'E'} = \frac{1}{3740526}.$$

---

221. Einfache unbestimmte Gleichungen. Die einfachen unbestimmten Gleichungen, worin die unbekannten Größen sämmtlich in der ersten Potenz vorkommen, fallen unter die allgemeine Form

$$Ax \pm By \pm Cz \pm \text{etc.} = K$$

und wenn sie nur zwei unbekannte Größen enthalten, unter die Form $Ax \pm By = K$. Hier werden unter A, B, K ganze Zahlen verstanden, von denen die beiden ersten keinen gemeinschaftlichen Factor haben dürfen, wenn nicht K durch den nämlichen Factor divisibel ist, weil der gebrochene Werth $\left(\frac{K}{f}\right)$ die Forderung, für x und y nur correspondirende ganze Zahlen aufzufinden, ungereimt machen würde. Ist die Gleichung auf ihre einfachste Gestalt gebracht, z. B. $234x + 90y = 1950$ auf $29x + 15y = 325$, so müssen folglich A und B Primzahlen zu einander (relative Pr.) sein, wenn eine Auflösung in ganzen Zahlen möglich werden soll.

222. Auflösung besonderer Fälle. Ist $Ax - By = o$, also $x = \frac{B}{A}y$, so erlaubt diese Gleichung eine unbegränzte Menge corresp. Werthe von x und y, indem man für y jedes beliebige Vielfache von A substituiren darf, um ganze Zahlenwerthe für x zu erhalten. Ist ferner A (oder B) = 1, so erhält die Gleichung die Form $x - By = K$ oder $x + By = K$, welche im ersten Falle eine unendliche Menge von Auf-

lösungen gestattet, im zweiten Falle aber fordert, daß K ein Vielfaches von B sei, und dann $\left(\frac{K}{B}-1\right)$ Auflösungen zuläßt.*) Sei z. B. $x+7y=28$, so sind die drei correspondirenden Werthe:

$$x=2,\ 14,\ 7.$$
$$y=1,\ 2,\ 3.$$

223. **Allg. Auflösung durch Reduction.** Ein, auf unbest. Gleichungen vom ersten Grade immer anwendbares Verfahren der Auflösung besteht darin, daß man dieselben auf die Form $Gw+z=K$ zu reduciren sucht, indem die Werthe von $z=K-Gw$ durch Substitution entsprechender ganzer Zahlenwerthe für w ebenfalls zu ganzen Zahlen werden müssen. Um nun eine Gleichung der Form $Ax+By=K$ auf jene einfachere zu bringen, nehme man eine abnehmende Zahlenreihe A, B, C, D ... an, so daß (wie in 216)

$$A=aB+C;\ B=bC+D;\ C=cD+E;\ \text{u. s. w.}$$

dann wird:

I. $Ax+By=K;\ =(aB+C)x+By=B(ax+y)+Cx=K$ oder durch die Vereinfachung $t=ax+y$:

II. $Bt+Cx=K;\ =(bC+D)t+Cx=C(bt+x)+Dt=K$ oder durch die Vereinfachung $u=bt+x$:

III. $Cu+Dt=K;\ =(cD+E)u+Dt=D(cu+t)+Eu=K$. oder wenn man $cu+t=z$ setzt:

IV. $Dz+Eu=K$: u. s. w,

Diese fortgesetzte Division durch die Reste $\left(\frac{A}{B}, \frac{B}{C}, \frac{C}{D}, \frac{D}{E}\cdot\right)$ führt nun, weil A und B (nach 221) relative Primzahlen sein müssen, (nach 39) endlich zu einem Reste $=1$, als ihrem größten gemeinschaftlichen Theiler. Also gelangt man auf dem bezeichneten Wege nothwendig zu einer Gleichung der Form $Gw+z=K$ und dadurch zu einem allgemeinen Ausdrucke von Zahlenwerthen für z, aus welchem rückschreitend diejenigen, von u, t, x, y ... sich ergeben werden.

---

*) Es ist zweckmäßig, bei der allg. Betrachtung die Werthe x oder $y=0$ ganz auszuschließen und für beide Größen ganze und positive Zahlenwerthe zu fordern. Im Folgenden wird dieß durchgängig angenommen.

Sei z. B. die Gleichung $20y-31x=7$ zur Auflösung gegeben, so wird dieselbe durch folgende Schritte auf eine einfachere reducirt.

Vorbereitung: $31=1.\ 20+11$; $20=1.\ 11+9$;
$11=1.\ 9+2$; $9=4.\ 2+1$.

I. $-31x+20y=7$; $-(1.20+11)x+20y=20(y-x)$
$-11x=7$. und wenn $y-x=t$:

II. $20t-11x=7$; $(1.11+9)t-11x=11(t-x)+9t$
$=7$. und wenn $t-x=u$:

III. $11u+9t=7$; $(1.9+2)u+9t=9(u+t)+2u=7$. und
wenn $u+t=z$:

IV. $9z+2u=7$; $(4.2+1)z+2u=2(4z+u)+z=7$. und
wenn $4z+u=w$:

V. $2w+z=7$; also $z=7-2w$.
$u=w+4z=9w-28$.
$t=z-u=35-11w$.
$x=t-u=63-20w$.
$y=t+x=98-31w$.

Da nur die positiven Werthe von x und y gültig sein sollen, so darf w nicht größer als $+3$, aber in der negativen Zahlenreihe unbestimmt groß angenommen werden. Daraus findet man:

wenn $w=$	$+3$,	$+2$,	$+1$,	0,	-1,	-2,	-3,	...
$x=$	3,	23,	43,	63,	83,	103,	123,	...
$y=$	5,	36,	67,	98,	129,	160,	191,	...

224. Fortsetzung. Ist die unbestimmte Gleichung dreitheilig, also von der Form $Ax+By+Cz=K$, so behandelt man sie wie eine zweitheilige $Ax+By=K-Cz=L$, indem in dem endlichen Ausdruck $Gw+v=L$ der Werth von $L=K-Cz$ restituirt wird. Dann darf man in $v=L-Gw=K-Cz-Gw$ nur für w beliebige und für z positive Werthe substituiren, jedoch von der Beschaffenheit, daß die von x und y ebenfalls positiv ausfallen.

Sei z. B. $5x+8y+7z=50$, so hat man

I. $5x+8y=50-7z$, oder $5(x+y)+3y=50-7z=L$;
und wenn $x+y=t$ oder $x=t-y$:

I. $5t+3y=L$, oder $3(t+y)+2t=L$;
und wenn $t+y=u$ oder $y=u-t$:

III. $3u+2t=L$, oder $2(u+t)+u=L$;
und wenn $u+t=w$ oder $t=w-u$

IV. $2w+u=L$; also $u=L-2w$

$$t=w-u=-L+3w$$
$$y=u-t=2L-5w$$
$$x=t-y=-3L+8w$$

und wenn für L sein Werth $50-7z$ restituirt wird,

$$x=-150+21z+8w;\quad y=100-14z-5w$$

Nun findet man, zulässige Werthe für z und w *versuchend*, folgende Reihen correspondirender Zahlenwerthe, worin die eingeklammerten nebst den ihnen zugehörigen als ungültig ausgeschlossen werden müssen.

z =	1	1	1	...	2	2	2	...	3	3	3	...
w =	16	17	18	...	13	14	15	...	10	11	12	...
x =	(-1)	7	15	...	(-4	4	12	...	(-7)	(-1)	9	...
y =	6	1	(-4)	...	7	2	(-3	...	8	3	(-2)	...

z =	4	4	4	...	5	5	5
w =	7	8	9	...	4	5	6
x =	(-10)	(-2)	6	...	(-13)	(-5)	3
y =	9	4	(-1)	...	10	5	(0)

Anmerkung. Die Darstellung solcher corresp. Zahlenreihen erleichtert man sich sehr durch die Bemerkung, daß sie Differenzreihen vom ersten Grade sind.

225. Auflösung durch Kettenbrüche. Das im Vorhergehenden dargestellte Verfahren, eine unbestimmte Gleichung des ersten Grades aufzulösen, wird dadurch einer bedeutenden Abkürzung fähig, daß man aus den Coefficienten von x und y einen Kettenbruch bildet und den letzten Näherungswerth $\frac{M}{M'}$ von seinem vollständigen Werthe $\frac{N}{N'}$ abzieht. Denn es ist (nach §. 218) die Differenz

$$\frac{N}{N'}-\frac{M}{M'}=\frac{NM'-N'M}{N'M'}=\frac{\pm 1}{N'M'}$$

und ihre Form nach Weglassung des Divisors mit der Gleichung $Nx-N'y=K$ vollkommen übereinstimmend, wenn man auf beiden Seiten durch $\pm K$ multiplicirt und $\pm M'K+x$, $\pm MK=y$ setzt. Da aber die Unbekannten in der Regel mehrere

Werthe zulassen und die Werthe $x = -M'K$ und $y = -MK$ als negative der Forderung nicht genügen, so muß man — um die vollständige Form ihrer Werthe zu haben — ein Vielfaches der gegenseitigen Coefficienten darin aufnehmen, und deshalb $x = N'f \pm M'K$ und $y = Nf \pm MK$ setzen. Dadurch wird die gegebene Gleichung verwandelt in die auflösende:

$$N(N'f \pm M'K) - N'(Nf \pm MK) = K.$$

Wäre hingegen ihre Form $Nx + N'y = K$, so müßte das zweite Glied der obigen Differenz durch doppelte Minusbezeichnung positiv gemacht, und zugleich Nf oder $N'f$ negativ gesetzt werden. Folgende Beispiele für beide verschiedene Fälle werden das Vorstehende näher erläutern.

1) $34x - 41y = 3.$

Hier ist $\frac{N}{N'} = \frac{34}{41} = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6}}}}$

also $\frac{M}{M'} = \frac{5}{6}$ und $NM' - N'M = 34.6 - 41.5 = -1.$ Daraus folgt, indem man mit $-K = -3$ multiplicirt:

$$34(-18) - 41(-15) = 3$$

oder vollständig durch Einführung von Nf und $N'f$:

$$34(41f - 18) - 41(34f - 15) = 3.$$

Setzt man hier $f = 1, 2, 3, 4 \ldots$, so geht folgende unbegränzte Reihe correspond. Zahlenwerthe hervor:

für $f =$	1	2	3	4	5	6	7	8 .....
$x =$	23	64	105	146	187	228	269	310 .....
$y =$	19	53	87	121	155	189	223	257 .....

2) $7x + 5y = 73.$

Hier ist $\frac{N}{N'} = \frac{7}{5} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}$

also $\frac{M}{M'} = \frac{3}{2}$ und $NM' - N'M = 7.2 - 5.3 = -1.$

Daraus folgt, indem man durch $-K = -73$ multiplicirt:

$$7\,(-146) - 5\,(-219) = +73$$
oder $$7\,(-146) + 5\,(219) = 73,$$
und wenn Nf und N'f hinzugefügt werden:
$$7\,(5f - 146) + 5\,(219 - 7f) = 73.$$

Die Form dieser auflösenden Gleichung gestattet nur zwei Werthe für f, nämlich 30 und 31, woraus $x=4$, $y=9$, und $x=9$, $y=2$ sich ergeben.

226. **Fortsetzung.** Auch auf dreitheilige unbestimmte Gleichungen ist das vorstehende Verfahren anwendbar, wenn man die **Gränzen** der zulässigen Werthe für eine der Unbekannten zuvor bestimmt und nach Transposition derselben die Gleichung wie eine zweitheilige behandelt, indem man nach und nach die Reihe der zulässigen Werthe für jenes transponirte Glied substituirt. Sei allgemein die Gleichung $Nx \pm N'y \pm N''z = K$, so wird sie unter der Gestalt $Nx \pm N'y = K \mp N''z = L$ dadurch auflösbar, daß man für z nach und nach bestimmte Zahlenwerthe an die Stelle setzt und die zugehörigen für x und y (nach 225) zu bestimmen sucht. Sei z. B. die gegebene Gleichung die schon (224) behandelte:
$$5x + 8y + 7z = 50,$$
so erhält man den **höchsten** Werth von $z=5$, indem man x und y möglichst geringe, $=1$ annimmt, da $z = \frac{1}{7}(50-5-8) = \frac{37}{7}$, weniger als 6 beträgt, folglich jeder höhere Werth als 5, für z gesetzt, einen negativen Werth von x oder y zur Folge haben, und deshalb **unzulässig** sein würde.

Man entwickele nun $\frac{N}{N'} = \frac{5}{8}$ als Kettenbruch, so ist der letzte Näherungswerth $\frac{M}{M'} = \frac{2}{3}$, und $5.3 - 8.2 = -1$ oder $5(-3) + 8(+2) = +1$. Daraus ergiebt sich durch Multiplication mit L und Einführung von Nf, N'f, die auflösende Gleichung:
$$5\,(8f - 3L) + 8\,(2L - 5f) = L.$$
Die Werthe von L sind nun, indem man $z = 1 \ldots 5$ setzt,
$L = 50 - 7z = 43, 36, 29, 22, 15;$
doch erscheinen bei näherer Betrachtung die beiden letzten Werthe, $z=4$ und 5, zur Auflösung nicht tauglich, so daß

nur $z=1, 2, 3$ oder $L=43, 36, 29$ übrig bleiben, und hieraus ergeben sich die corresp. Zahlerwerthe:

z	=	1.	2.	3.
y	=	1.	2.	3.
x	=	7.	4.	1.

227. Höhere unbestimmte Gleichungen. Ueberschreiten die unbestimmten Gleichungen den ersten Grad, so ist die Untersuchung ihrer Auflösung mit großen Schwierigkeiten verknüpft. Derjenige Fall, wo die eine der Unbekannten (y) durch eine, in ganzen und positiven Potenzen der andern (x) fortschreitende Reihe dargestellt wird, erlaubt eine unendliche Menge von Auflösungen, sobald man nur einen einzigen auflösenden Werth von x kennen gelernt hat. Denn es sei:

$$py = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \ldots\ldots + kx^n$$

$$\text{oder } y = \frac{a + bx + cx^2 + \ldots\ldots + kx^n}{p}$$

und α ein Werth von x, welcher die Reihe durch p divisibel macht, so kann man allgemein $x = \alpha + fp$ setzen, unter f eine beliebige ganze Zahl verstanden, indem alsdann:

$$y = \frac{a + b\alpha + c\alpha^2 \ldots + k\alpha^n}{p} + \frac{Afp + B(fp)^2 + C(fp)^3 \ldots + K(fp)^n}{p}$$

in beiden Theilen durch p divisibel ist.

228. Unbestimmte quadratische Gleichungen. Die allgemeinste Form einer quadratischen Gleichung mit zwei unbekannten Größen ist:

(1) $Ax + By + Cx^2 + Dxy + Ey^2 + K = 0$

und der daraus gezogene Werth von y, in Function von x:

$$y = -\frac{Dx + B}{2E} \pm \frac{\sqrt{(Bx+B)^2 - 4E(K + Ax + Cx^2)}}{2E}$$

Es folgt daraus die Gleichung

(2) $2Ey + Dx + B = \sqrt{(Dx + B)^2 - 4E(K + Ax + Cx^2)}$

$$= \sqrt{(D^2 - 4EC)x^2 + (2BD - 4AE)x + (B^2 - 4EK)}$$

oder kürzer $= \sqrt{Mx^2 + Nx + P}$.

Setzt man nun (3) $Mx^2 + Nx + P = z^2$, so ist

(4) $2Ey + Dx + B = \pm z$.

Ferner giebt die Auflösung der Gleichung (3)

$$x = -\frac{N}{2M} \pm \frac{\sqrt{N^2 - 4MP + 4Mz^2}}{2M}$$

oder

(5) $2Mx + N = \pm \sqrt{4Mz^2 + (N^2 - 4MP)}$

und kürzer angedeutet $= \pm \sqrt{Fz^2 + G}$.

Kann man nunmehr z so bestimmen, daß $Fz^2 + G$ Quadrat einer ganzen Zahl ($= u^2$) wird, so hat man die auflösenden Gleichungen:

(6) $2Mx + N = u$, oder $x = \frac{u - N}{2M}$.

(7) $2Ey + Dx + B = z$, oder $y = \frac{z - (Dx + B)}{2E}$.

Aber nur sehr selten wird man für z eine ganze Zahl von der erforderlichen Beschaffenheit finden, also in einzelnen Fällen der Untersuchung, die auf quadratische unbestimmte Gleichungen führen, durch angemessene Kunstgriffe der Rechnung, welche sich nicht unter gewissen Regeln bringen lassen, die Lösung der Aufgabe versuchen müssen. —

229. Anwendungen. Die in diesem Capitel enthaltenen Betrachtungen und Vorschriften anzuwenden, bieten nachstehende Aufgaben Veranlassung dar. —

1) Welche Ziffer muß an die Stelle von x in der Zahl 765 x 437 gesetzt werden, wenn sie durch 3 divisibel sein soll?

Nach 212 (3) ist $x = 1$ oder 4 oder 7.

2) Durch welche Ziffer muß man die Stelle von x in der Zahl 439 x 543 ausfüllen, um sie durch 7 divisibel zu machen?

Man gelangt, (nach 212 (6)) zu der Gleichung $80 + 6x = 7t$, und findet $x = 3$, weil $98 = 7 \cdot 14$.

3) Durch welche Zahlen ist das Product von a, b, c, d nothwendig theilbar, wenn diese Zahlen (einzeln genommen) durch 8 dividirt, $\alpha = 5$, $\beta = 4$, $\gamma = 7$, $\delta = 2$ als Reste lassen?

Das Product der Reste $\alpha.\ \beta.\ \gamma.\ \delta = 280$ enthält die Factoren 8, 4, 2, mithin ist (nach 214) auch das Product a. b. c. d durch diese Zahlen divisibel.

4) Welche Potenzen der Zahl 1798 sind durch 64 theilbar?

Da $1798 = 28.\ 64 + 6$, so findet man (nach 215) die gesuchten Potenzen von 1798, indem man die Frage in Beziehung auf den Rest 6 zu beantworten sucht. Es ist aber $64 = 2^6$ und $6 = 3.\ 2.$, also $6^6 = 3^6 2^6$ und folglich genügen der Aufgabe die Werthe 6, 12, 18, 24, 30 u. s. w.

5) Die Dauer des wahren (tropischen) Jahres, d. h. des vollständigen Umlaufs der Erde um die Sonne, beträgt 365 T. 5 St. 48′ 49″, mithin 5 St. 48′ 49″ mehr, als die des gewöhnlichen bürgerlichen Jahres von 365 Tagen. Wieviel Tage und nach wie vielen Jahren müssen nun eingeschaltet werden um diese Verschiedenheit wieder auszugleichen?

Da 24 St. = 86400″ und 5 St. 48′ 49″ = 20929,″ so ist das wahre Jahr um $\frac{20929}{86400}$ Tag länger, als das bürgerliche: also müßten zur völligen Ausgleichung beider nach 86400 Jahren 20929 Tage eingeschaltet werden. Das Verhältniß beider Zahlen giebt aber (nach 220) als successive Näherungswerthe der öfteren Einschaltung:

$$\frac{4}{1}, \frac{29}{7}, \frac{33}{8}, \frac{128}{31}, \frac{161}{39}, \frac{2704}{655}, \frac{2865}{694}, \frac{5569}{1349}.$$

6) Stücke von Zinn zu einem Pfunde sollen mit andern von Blei zu zehn Pfunden legirt werden, um eine Mischung hervorzubringen, die einen Centner an Gewicht hat. Auf wie vielerlei Weise kann dieses geschehen?

Die Gleichung $x + 10y = 110$ oder $x = 110 - 10y$ erlaubt (nach 222) $\frac{110}{10} - 1 = 10$ verschiedenen Auflösungen für $y = 1, 2 \ldots 10$.

7) Es werden zweierlei Kanonen, zu 16 und zu 25 Centner gegossen, und man bedarf zu der ersten Art einen Centner mehr, als zur zweiten. Wie viel gießt man demnach von beiden?

Für die Gleichung $16x-25y=1$ findet man (223 oder 224) die auflösende:

$$16\,(11+25f)-25\,(7+16f)=1$$

und daraus die zusammengehörenden Werthe:

$x=11,\ 36,\ 61,\ 86,\ 111,\ 136,\ldots.$
$y=\ 7,\ 23,\ 39,\ 55,\ 71,\ 87,\ldots.$

8) Es ist eine Summe von 1591 Thalern unter Artilleristen und Infanteristen dergestalt vertheilt worden, daß ein Jeder von jenen 34, von diesen 23 Thaler erhalten hat. Wie viel waren von beiden Waffengattungen?

Für $34x+23y=1591$ ist die auflösende Gleichung:

$$34(23f-3182)+23(4773-34f)=1591$$

und da $f=139$ oder 140 sein muß, entweder

$$x=15,\ y=47,\ \text{oder}\ x=38,\ y=13.$$

9) Jemand hat 76 Bäume, theils Eichen, Buchen, Tannen und Erlen zu den Preisen von 20, $10\frac{1}{2}$, 7 und 4 Thalern gekauft und für Alle 707 Thaler bezahlt. Wieviel Bäume mögen unter jener Anzahl sein?

Die unbestimmte Gleichung ist hier:

$$20x+10\tfrac{1}{2}y+7z+4(76-x-y-z)=707$$

oder zusammengezogen:

$$32x+13y+6z=806$$

und giebt, nach §. 223 oder 225 behandelt: die correspondirenden Werthe:

x,	y,	z,	w.
2	46	24	4
10	30	16	20

10) Welche Werthe von x und y genügen der unbestimmten Gleichung:

$$12y=x^5+2x^4+3x^3+2x^2+4x?$$

Setzt man für x den Zahlenwerth 3, so wird die Reihe durch 12 divisibel. Folglich ist (nach 227) die Form der auflösenden Werthe $x=(3+12f)$ und man erhält als solche 3, 15, 27, 39 . . .

11) Zwei Vereine von Freunden legen zu Anschaffung eines *physikalischen* Apparats soviel zusammen, daß dem ersten

zu dieser Absicht noch 40 Thaler fehlen, während der andere für jeden Theilnehmer einen Ueberschuß von so viel mal 18 Thalern hat, als er Mitglieder zählt. Es hat nämlich jedes Mitglied des ersten Vereins 47 Thaler und noch 12 mal so viel, als Personen in ihm vorhanden sind: jedes Mitglied des andern aber 54 Thaler und außerdem 30 mal so viele Thaler, als der erste Verein Personen zählt, beisteuert. Wieviel waren der Freunde in jedem Vereine und wieviel kostete der anzuschaffende Apparat?

Die Bedingungen der Aufgabe geben die Gleichung:

$$x(47+12x)+40=y(54+30x)-18y.y$$

oder geordnet nach der allg. Form in §. 228:

(1) $47x-54y+12x^2-30xy+18y^2+40=0.$

Daraus ergeben sich allmählig die Gleichungen

(2) $36y-30x-54=\sqrt{(36x^2-144x+36)}=z$

(3) $x-2=\frac{1}{6}\sqrt{(z^2+108)}$; und wenn man $z=6$ setzt, $x=2+\frac{1}{6}\sqrt{144}=4$, also:

(4) $36y-30.4-54=6$, oder $y=\frac{180}{36}=5.$

Der erste Verein zählt also 4, der andere 5 Mitglieder und die Summe beträgt 420 Thaler.

12) Zwei Quadrate zu finden, deren Unterschied oder Summen einem doppelten Quadrate gleich sei.

I. Es sei $x^2-y^2=2z^2$ oder $x^2=y^2+2z^2$, so setze man $y^2+2z^2=(y-az)^2=y^2-2ayz+a^2z^2$, also $2z=-2ay+a^2z$ oder $z(a^2-2)=2ay$, woraus sich $z=\frac{2ay}{a^2-2}$ ergiebt. Um ganze Zahlen für z und y zu erhalten, setze man $y=a^2-2$, folglich $z=2a$, und für a beliebige Werthe >1. Man findet auf diese Weise

für	$a=2,$	3,	4,	5,	6,	. . .
	$y=2$	7	14	23	34	. . .
	$z=4$	6	8	10	12	. . .
	$x=6$	11	18	27	38	. . .

II. Es sei $x^2+y^2=2z^2$ oder $x^2=2z^2-y^2=z^2+(z+y).(z-y)$ so setze man $z^2+(z+y)(z-y)=(z+a(z-y))^2$ oder $=z^2+2az(z-y)+a^2(z-y)^2$, also

$x+y=2ax+a^2(x-y)$ oder $x(1-2a-a^2)=-(1+a^2)y$, woraus $x=-\frac{(1+a^2)y}{a^2+2a-1}$ folgt. Um ganze Zahlen für x und y zu bekommen, setze man $y=a^2+2a-1$, folglich $x=1+a^2$, und für a beliebige Werthe. Dadurch findet man:

für	a =	1,	2,	3,	4,	5, ...
	y =	2	7	14	23	34 ...
	z =	2	5	10	17	26 ...
	x =	2	1	2	7	14 ...

Zweite Abtheilung.

Geometrie.

Erſtes Buch.

Die Geometrie der Ebene.

---

230. **Raum.** Alle Vorſtellungen von Gegenſtänden, die im Bereiche der ſinnlichen Wahrnehmung wirklich vorhanden oder auch nur möglich ſind, beruhen als Erzeugniſſe unſerer Einbildungskraft auf der urſprünglichen Vorſtellung des **Raumes**, die ſo wenig als diejenige der **Größe** ſich in einfachere Begriffe auflöſen läßt, aber die Merkmale von **Gleichartigkeit**, **Stetigkeit** und unbegränzter **Ausdehnung** in ſich ſchließt.

231. **Dimenſionen.** Welchen Ort man auch im Raume annehmen möge, man iſt genöthigt, dieſen nach allen Seiten oder in allen Richtungen als ausgedehnt ſich vorzuſtellen. Von dieſen unzähligen Richtungen oder **Dimenſionen** braucht man aber nur die drei, mit den Namen: **Länge**, **Breite** und **Höhe** bezeichneten, die ſich auf die relativen Begriffe: **Oben**, **Vor-** und **Seitwärts** beziehen, zum Grunde zu legen, um vermöge ihrer alle übrigen Richtungen, ſo wie die Lage oder Begränzung irgend eines Raumtheils anzugeben.

232. **Raumformen.** Indem wir irgend einen abgeſonderten Theil des Raums als ringsum begränzt denken, erhalten wir die Vorſtellung einer **Raumform**, der die Prädicate, Höhe, Länge und Breite beigelegt werden müſſen, und die man mit dem allgemeinen Namen **Körper** bezeichnet. Die Gränze, welche den Körper vom umgebenden

Raume absondert, und der als solcher keine Höhe, sondern nur Länge und Breite zukommen kann, ist die zweite Raumform — die Fläche. Denkt man sich einen Theil dieser Fläche wiederum abgesondert, so kann der Gränze, als solcher, von den beiden Ausdehnungen nur noch die eine der Länge bleiben, und sie bietet unter dem Namen der Linie die dritte Raumform dar. Jede Linie endlich findet ihre Gränze in einem Punkte, der keine Ausdehnung mehr haben kann und sich folglich, als etwas Einfaches und Untheilbares, aller räumlichen Betrachtung entzieht.

233. Erzeugung der Raumformen. Soll die Vorstellung bestimmter Raumformen nicht als etwas Gegebenes, blos Angeschauetes, aufgenommen, sondern vielmehr von der Einbildungskraft erzeugt werden, so muß sie von derjenigen des Punktes ausgehen und durch dessen Fortschreiten im Raume anfangs Linien, dann aus Linien Flächen und endlich aus Flächen körperliche Gestalten entstehen lassen oder construiren. Die Betrachtung geht folglich von den Linien und deren (zu Figuren) geschlossener Verbindung auf die Flächen und deren Verbindung (zu Körpern) über, wobei sie stets die gegenseitige Lage der Linien und Flächen oder die von ihnen gebildeten Winkel zu berücksichtigen hat. Hierdurch ist der Geometrie, als Wissenschaft der Constructionen im Raume, die sich sowol mit der Erzeugung der mannigfaltigen räumlichen Gestalten als der Erkenntniß ihrer Eigenschaften und Beziehungen zu beschäftigen hat, ihr nothwendiger Gang vorgezeichnet.

234 Zusammenhang der Raumformen. Sobald durch die Verbindung von Linien oder Flächen Figuren oder körperliche Gestalten entstehen, treten jene mit einander und den von ihnen gebildeten Winkeln — wie die nähere Betrachtung lehrt — in einen solchen Zusammenhang, daß die Kenntniß einer gewissen Anzahl derselben zur Bestimmung der übrigen Linien, Flächen oder Winkel hinreicht. — Diese Bestimmung kann nun rein geometrisch sein, d. h. lediglich durch Construction geschehn: oder auch die arithmetischen Lehren, die als allgemeine auch auf räumliche Größen anwendbar sein müssen, zu Hülfe nehmen. Denn wo verschiedene, von einander abhängige, Raumformen auf einan-

der bezogen und unbekannte mit bekannten in Verbindung gesetzt werden, da bietet sich zur kürzern Darstellung der Begriffe von selbst die Zeichensprache der Arithmetik dar, vermöge welcher der Zusammenhang von Größen in einer Gleichung dargestellt wird.

235. Grundconstructionen. Da die Geometrie (nach 233) die Erzeugung zusammengesetzter Constructionen aus einfachen zum Gegenstande hat, so muß sie durch Aufstellung der einfachsten, welche als solche keiner weiteren Zurückführung auf andere fähig sind, den Anfang ihrer Untersuchungen machen. Diese Grundconstructionen (der geraden Linie und ihrer Drehung), die nicht weiter abgeleitet zu werden vermögen, sondern zu den ursprünglichen Vorstellungen gehören, müssen als die unmittelbaren Erzeugnisse unserer Einbildungskraft postulirt, und die Bedingungen, deren wir bei ihrer Entstehung uns bewußt geworden, als Axiome oder an sich einleuchtende Grundwahrheiten ausgesprochen werden.

Erstes Kapitel.

Die Linien und Winkel.

236. Linien. Schreitet ein Punkt stets in der nämlichen Richtung fort, so beschreibt er eine gerade, im Gegentheile aber, wenn er seine Richtung unaufhörlich ändert, eine krumme Linie. Denkt man beide Arten von Linien als schon vorhanden, so heißt diejenige gerade, welche mit einer ihr gleichen Linie auf keine Weise einen Flächenraum einschließen kann, jede andere aber, die weder selbst gerade, noch aus geraden zusammengesetzt ist, krumme.

237. Ebene. Durch das Fortschreiten einer geraden Linie auf einer andern geraden in unveränderter Richtung kann man sich eine Ebene erzeugt denken, oder auch als Merkmal ihrer ursprünglichen Vorstellung angeben, daß jede gerade Linie, die zwei Punkte in derselben verbindet, zugleich

in allen übrigen Punkten mit ihr zusammen fallen muß. Die Geometrie der Ebene setzt — wie ihr Name sagt — alle Linien nebst ihren Verbindungen, in ebener Fläche voraus.

238. Gerade Linie. Es folgt aus der Erzeugung einer geraden Linie, daß durch jeden Punkt eine unzählige Menge derselben nach allen Richtungen, daß aber nach einem gegebenen zweiten Punkte nicht mehr, als eine einzige, gezogen werden kann, — daß diese gerade Linie zugleich der kürzeste Weg zwischen beiden Punkten und mithin Richtung und Länge derselben durch jene Punkte völlig bestimmt ist. Ueber diese aber kann man sie, wenn nur die Richtung dadurch bezeichnet werden sollte, auch willkührlich verlängert und insofern als unbegränzt oder unendlich denken.

239. Kreislinie. Am einfachsten läßt man eine krumme Linie dadurch entstehen, daß eine gerade von bestimmter Länge um ihren einen unbeweglichen Endpunkt in einer Ebene so lange sich dreht, bis sie wieder in ihre anfängliche Lage zurückgelangt, wodurch der andere Endpunkt in stets gleichem Abstande von dem ruhenden die Kreislinie beschreibt. Sie ist also unter den krummen Linien diejenige, die in allen ihren Punkten von einem innerhalb liegenden Mittelpunkte oder Centrum gleichweit, nämlich um die Länge des Radius, entfernt ist.

240. Messung gerader Linien. Um die Länge einer geraden Linie zu bestimmen, vergleicht man sie mit einer andern und macht diese dadurch zu ihrem Maaße oder zur Längeneinheit. Das Messen besteht dann im wiederholten Abtragen der Einheit oder auch einzelner Theile derselben auf die gegebene Linie, jenachdem diese genau ein Vielfaches von jener ist oder nicht. Kommt es darauf an, das größte gemeinschaftliche Maaß für zwei gegebene Linien zu bestimmen, so hat man (wie bei der nämlichen Aufgabe für Zahlen), die größere mit der kleineren, diese mit dem etwa übrig gebliebenen Stücke von jener, u. s. f. immer das frühere Maaß mit dem Reste des Gemessenen zu vergleichen, bis kein Stück mehr übrig bleibt.

Fig. 1. Sei die Linie A in der größern B allgemein a mal abgetragen, und B′ als Rest geblieben, also $B = a.A + B'$, so könnte man das Stück B′ als Maaß beider Linien anneh

men, wenn es ein bestimmter Theil von A wäre. Bleibt aber nach β maligem Abtragen von B' auf A noch der Rest A', so ist $A = \beta . B' + A'$. Wäre nun endlich A' in B' genau γ mal enthalten, so hätte man:

$B' = \gamma . A'$; $A = \beta . B' + A' = (\beta\gamma + 1) A'$;

$B = \alpha . A + B' = (\alpha\beta\gamma + \alpha) A' + \gamma A' = (\alpha\beta\gamma + \alpha + \gamma) A'$;

B ist also ein Vielfaches der Linie A', und verhält sich zu ihr, wie die Zahl $(\alpha\beta\gamma + \alpha + \gamma)$ zur Einheit. Zwei Linien A und B, die ein solches gemeinschaftliches Maaß haben, oder durch eine dritte A' sich beide messen lassen, heißen commensurabel.

241. Incommensurable Linien. Wenn es unmöglich ist, daß bei solchem wiederholten Messen ein Rest gefunden werde, der beiden Linien A und B als gemeinschaftliches Maaß zu dienen vermag, so nennt man dieselben incommensurabel. In diesem Falle muß man sich begnügen, die Länge der Linie B durch hinlänglich kleine Theile von A zu bestimmen, und diese Theilung von A kann (wenigstens in der Vorstellung) so weit getrieben werden, daß der vernachlässigte Rest von B kleiner, als irgend eine gegebene Länge sei. Nennen wir einen, dieser Bedingung genügenden kleinen Theil x, und finden, daß derselbe mehr, als α und weniger als $(\alpha + 1)$ mal in B enthalten sei, so reicht es hin, die Länge der incommensurabeln Linie $B = \alpha . x$ zu setzen, obgleich sie $> \alpha . x$ und $< (\alpha + 1) x$ ist.

242. Messung krummer Linien. Soll die Länge einer krummen Linie in Beziehung auf eine gerade angegeben werden, so kann dieses im Allgemeinen nur näherungsweise dadurch geschehen, daß man eine aus mehreren geraden Stücken bestehende oder gebrochene Linie, die in vielen Punkten mit der krummen zusammenfällt, statt dieser mißt. Denkt man sich an beiden Seiten der krummen Linie K (die man jedoch nicht als eine zusammengesetzte, sondern als einfache, d. h. nur nach einer Seite sich wendende krumme Linie betrachten darf) die gebrochenen G und L, so ist zwischen je zwei Punkten (b, c) die innere gerade Linie kleiner, die äußere gebrochene hingegen größer, als das eingeschlossene Stück der krummen, die ganze Linie K also zwischen der kleineren G und der größern L enthalten. Fig. 2.

Bestehen nun beide gebrochene Linien aus so vielen und so kleinen Stücken, daß sie nur um eine Länge x von einander verschieden sind, die wegen ihrer Kleinheit vernachlässigt werden darf, so nimmt man die Länge der innern gebrochenen Linie als diejenige der krummen an.

Fig. 3. 243. Winkel. Wenn zwei gerade Linien AC, BC, einander treffen, so nennt man die Neigung, welche ihre Lage gegeneinander bestimmt, Winkel, die Linien selbst Schenkel und ihren Durchschnittspunkt den Scheitel oder die Ecke des Winkels. Die von zwei Durchschnittslinien gebildeten und neben einander liegenden Winkel ACB, ACG oder ACB, BCF heißen Nebenwinkel, die einander gegenüberstehenden ACB, GCF Scheitel- oder Verticalwinkel. Durchschneiden die Linien einander unter gleichen Nebenwinkeln, BCD=DCG oder BCE =ECG, so werden sie in Hinsicht ihrer gegenseitigen Lage Senkrechte oder Perpendikel, die gleichen Nebenwinkel aber rechte Winkel genannt. Ein Winkel ACB, kleiner als ein rechter, heißt ein spitzer, und wenn er größer ist, wie z. B. ACG, ein stumpfer Winkel. Die Ergänzung eines spitzen Winkels zu einem rechten pflegt man sein Complement, die eines beliebigen (spitzen oder stumpfen, zu zwei rechten Winkeln aber sein Supplement ment zu nennen. So ist z. B. ACB=compl. ACD oder =(R—ACD), und GCA=suppl. ACB oder = (2R–ACB). Solche Linien, die durchaus keinen Winkel bilden können, weil sie einander nirgends treffen, wie AF und MN, werden Parallelen und die von ihnen und einer Durchschnittslinie gebildeten Winkel ACP und CPN in Beziehung auf einander Wechselwinkel genannt.

Fig. 4. 244. Winkelmessung. Da man einen Winkel dadurch entstanden sich denken kann, daß eine gerade Linie aus ihrer anfänglichen Richtung CB durch Drehung um den unbeweglichen Punkt C in eine andere CA übergegangen ist, wobei der Endpunkt B das Stück einer Kreislinie den Bogen BA, beschrieben haben würde, so bietet sich eine solche, in gleiche Theile getheilt, sehr einfach zur Winkelmessung dar. Die Winkel am Centrum ACB, ACD verhalten sich nämlich, wie die zwischen ihren Schenkeln liegen-

den Kreisbogen AB, AD: denn da zwei gleiche Winkel BCD, DCE, wenn man sie auf einander gelegt denkt, mit ihren Schenkeln und zugleich mit den zugehörigen Kreisbogen BD, ED, wegen ihres überall gleichweiten Abstandes vom Mittelpunkte, auf einander fallen müssen, so sind diese Bogen einander gleich, folglich auch die Bogen des zwei- drei- und mehrfachen Winkels BCD das zwei- drei- und mehrfache des Bogens DB. Denkt man sich nun BCD so klein, daß ACE und ACD als Vielfache desselben angesehen werden dürfen (falls sie auch etwa incommensurabel wären), so müssen die Bogen AE und AD dieselben Vielfachen vom Bogen DB sein, also *die Winkel allgemein sich verhalten, wie die ihnen entsprechenden Kreisbogen.* Man pflegt aus diesem Grunde den ganzen Kreisumfang in 360 oder 400, also jeden Viertelkreis oder Quadranten in 90 oder 100 Grade, jeden Grad in 60 oder 100 Minuten und jede Minute in 60 oder 100 Secunden zu theilen, um durch solche Theile der Kreislinie die Winkel, welche man zwischen zwei Radien derselben, als ihren Schenkeln, eingeschlossen denkt, in bestimmten Zahlen angeben zu können.

245. Lehrsätze über Linien und Winkel.

1. Aus einem Punkte C einer geraden Linie GB kann nur *eine* Senkrechte CD gezogen werden. Fig. 3.

Denn angenommen, es gäbe eine zweite Senkrechte CA, so wäre W. DCB=DCG und W. ACB=ACG, welches unmöglich ist.

2. Alle rechte Winkel sind einander gleich. Fig. 5.

Denn denkt man sich die beiden rechten W. ACB, DFE mit ihren Schenkeln CA, FD auf einander gelegt, so widerstreitet die Annahme, daß CB in die Richtungen FG, FH fallen könnte, der Voraussetzung, weil aus F nur eine Senkrechte gezogen werden kann.

3. Zwei Nebenwinkel sind zusammen zwei rechten gleich. Fig 3.

Denn der stumpfe W. ACG ist = R+x, und der spitze W. ACB=R−x, also ihre Summe =2R.

Zusatz. Die Summe aller Winkel über einer geraden Linie mit gemeinsamen Scheitel ist =2R.

Fig. 2. 4. Die Summe aller Winkel um einen Punkt C iſt vier rechten Winkeln gleich.

Denn wenn man durch dieſen Punkt eine beliebige Linie AF zieht, ſo liegen zu beiden Seiten derſelben Winkel, deren Summe $=2R$; alſo müſſen alle $4R$ betragen.

Fig 2. 5. Wenn zwei Winkel, die einen Schenkel CA und den Scheitel C gemein haben, zuſammen zwei rechten gleich ſind, ſo fallen ihre anderen Schenkel in eine gerade Linie.

Denn fiele der Schenkel des einen W. nicht in die Verlängerung von GC, ſondern etwa in CK, ſo wären $ACK+ACG=2R$, und (nach L. 3) zugleich $ACB+ACG=2R$, alſo W. $ACK=ACB$, welches unmöglich iſt.

Fig. 3. 6. Scheitelwinkel ſind einander gleich.

Denn W. $ACB+ACG=2R$ und $FCG+ACG=2R$, alſo $ACB=FCG$.

Fig. 3. 7. Vier Linien, CA, CD, CB, CL, aus einem Punkte C ſo gezogen, daß zwei und zwei ſenkrecht auf einander ſtehen, bilden drei Winkel, von denen die äußern einander gleich ſind.

Denn iſt W. $DCB=R$, und auch $ACL=R$, ſo bleibt nach Abzug des gemeinſchaftl. W. ACB von beiden: $ACD=BCL$.

Zweites Kapitel.

Die geradlinigen Figuren.

246. Figur. Wenn gerade oder krumme Linien in einer Ebene einen bestimmten Theil derselben völlig begränzen oder einschließen, so bildet ihre Verbindung eine Figur. Die Linien, welche eine geradlinige Figur bilden und ihre Seiten genannt werden, treffen sich unter eben so vielen Winkeln, weil jede folgende Seite unter einem gewissen Winkel an die vorhergehende treten muß, bis die letzte (n^{te}) sich mit der ersten Seite unter dem letzten (n^{ten}) Winkel verbindet und dadurch die Figur schließt. Man kann folglich die verschieden gestalteten Figuren nach der Anzahl ihrer Seiten oder Winkel Drei-, Vier-, Fünf-Ecke u. s. w. nennen. Sollten unter diesen Bestandtheilen einer Figur, den Seiten und Winkeln, einige ihrer Größe und Lage nach durch andere mit Nothwendigkeit bestimmt werden, so wird man bestimmende und abhängige Stücke in derselben unterscheiden müssen. Durchschnittslinien, welche innerhalb der Figur deren Winkelpunkte oder Ecken mit einander verbinden, heißen Diagonalen, wenn sie hingegen aus einer Ecke durch eine gegenüberstehende Seite gezogen sind, Transversalen. Sollten Figuren mit durchaus gleichen Seiten und Winkeln möglich sein, so gebührt diesen vorzugsweise der Name von regulären Figuren.

247. Congruenz und Gleichheit. Wenn bei der Vergleichung mehrerer Figuren unter den Seiten und Winkeln in Ansehung ihrer Lage und Größe eine so vollkommene Uebereinstimmung sich findet, daß jene Figuren — wenn man sie auf einander gelegt sich vorstellt — in eine und dieselbe zusammenfallen würden, so sagt man, daß sie einander decken oder nennt sie congruent. Sollten sie hingegen nur in Ansehung ihres Flächengehaltes übereinstimmen, während die Seiten oder Winkel verschieden wären, so mögen sie zum Unterschiede von jener vollkommenen Gleichheit oder Congruenz, die durch das Zeichen $\equiv$ angedeutet werden soll, inhaltsgleich genannt und diese

Gleichheit, welche nicht die nämliche Form voraussetzt, durch das gewöhnliche Zeichen = angegeben werden. Gerade Linien von gleicher Länge, so wie gleiche Winkel sind auch nothwendig congruent; für Figuren aber wird die Congruenz nur aus der Gleichheit der bestimmenden Stücke hervorgehen, also unter gewissen Bedingungen erfolgen, die man für jede einzelne untersuchen muß.

248. Dreieck. Die einfachste Verbindung gerader Linien zu einer Figur ist die, wo ihrer zwei, die einen Winkel bilden, außer dem Scheitelpunkte desselben von einer dritten geschnitten werden, das Dreieck. Von seinen drei Seiten nennt man willkührlich eine die Grundlinie, die gegenüberliegende Ecke die Spitze oder den Scheitel des Dreiecks, und eine, aus derselben auf die (nöthigenfalls verlängerte) Grundlinie gefällte Senkrechte seine Höhe. Ein Dreieck mit zwei Seiten von gleicher Länge heißt ein gleichschenkliges, mit drei gleichen Seiten ein gleichseitiges.

249. Lehrsätze über die Congruenz der Dreiecke, und die gegenseitige Abhängigkeit ihrer Seiten und Winkel.

Fig. 5. 1. Dreiecke sind congruent, wenn in denselben zwei Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel gleich sind.

Denn ist AB=DE, AC=DF und W. A=D, so werden, wenn man die Dreiecke so auf einander legt, daß W. A und D einander decken, ihre gleichlangen Schenkel AB, DE, und AC, DF in einander fallen, und da alsdann zwischen den Punkten B (E) und C (F) nur eine gerade Linie möglich ist, auch die W. B, E und C, F einander decken.

Fig. 6. 2. Dreiecke sind congruent, wenn in denselben eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gleich sind.

Denn ist AB=DE, W. A=D und W. B=E, so muß auch FE=CB sein, weil W. A und D einander nicht decken könnten, wenn eine andere Länge, z. B, EG oder EK=BC wäre. Dann aber folgt die Congruenz aus L. 1.

Fig. 6. 3. In einem gleichschenklichen Dreiecke liegen den gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber.

Denn sei CA=CB, und die Linie CL aus C nach dem Hal-

birnngspunkte der Seite AB gezogen, so ist (nach L. 1) Dr. CAL = CBL, folglich auch W. A = W. B.

Zusatz. In einem gleichseitigen Dreiecke ist, weil AC = BC, W. B = A, und weil BC = AB, auch W. A = C, also W. A = B = C.

4. Sind in einem Dreiecke zwei Winkel einander gleich, so ist es ein gleichschenkliges.

Sei W. D = W. E, so würde die Annahme, daß DF nicht = EF, sondern etwa = EG oder EK sei, wegen der daraus folgenden Veränderung des W. D. dieser Voraussetzung widersprechen und ist deshalb nicht zulässig.

5. Dreiecke sind congruent, wenn alle drei Seiten des einen denen des andern gleich sind. Fig. 7.

Denn denkt man sich die Dr. ABC, DEF mit AB = DE an einander gelegt, also AG = DF und BG = EF, so hat man, CG ziehend, die gleichsch. Dreiecke ACG und BCG, mithin W. x = y, und W. o = p, also x + o = y + p, woraus (nach L. 1) die Congruenz der Dr. folgt.

6. Der durch Verlängerung einer Dreiecksseite entstehende äußere Winkel ist größer, als jeder innere, ihm gegenüberstehende. Fig. 8.

Denn denkt man sich AB verlängert, CB in E halbirt, auf der Linie AD das Stück ED = EA abgetragen und BD gezogen, so ist (nach L. 1) Dr. EDB = EAC, also W. C = EBD und < EBF. Eben so ist W. A < ABG, also auch < EBF,

Zusatz. Wird die Seite AC beliebig um CK verlängert und KB gezogen, so ist W. KBF < CBF und kann auf diese Weise unaufhörlich verkleinert, aber dennoch ein = W. A werden.

7. Zwei Winkel eines Dreiecks zusammen sind kleiner als zwei rechte. Fig. 8.

Denn da die Summe der Winkel BAK + C (nach L. 5) kleiner sein muß, als BCK + C, so ist sie auch < 2R.

Zusätze. Es kann also ein Dreieck nie mehr, als einen einzigen rechten oder stumpfen Winkel enthalten. Ist einer seiner Winkel ein rechter, so heißt es ein rechtwinkliges, jede dem rechten W. anliegende Seite Cathete und die

ihm gegenüberstehende Hypotenuse. Ist einer der Winkel im Dreiecke stumpf, so wird es ein stumpfwinkliges, sind sie aber alle spitz, ein spitzwinkliges Dreieck genannt.

Fig. 9. 8. Der größere Winkel im Dreieck steht auch der größern Seite gegenüber.

Denn ist $AC > CB$, und macht man die verlängerte $CD = CA$, $CE = CB$, so ist Dr. $CAB = CDE$, also W. $A = D$ und deshalb (nach L. 5) $< B$.

Fig. 10. 9. Die größere Seite im Dreieck steht dem größeren Winkel gegenüber.

Denn ist W. $A < B$, so würde die Annahme $AC < CB$ oder $= CB$ mit dem vorigen Satz oder L. 3 unverträglich sein.

Fig. 10. 10. Die Summe zweier Dreiecksseiten ist immer größer, ihr Unterschied hingegen immer kleiner, als die dritte Seite.

Denn I. verlängert man AC um $CD = CB$, und zieht BD, so ist W. $CDB = CBD$, also W. $ABD > D$, und deshalb (nach L. 8) AD oder $(AC + CB) > AB$.

II. Schneidet man auf CA eine Länge $CE = CB$ ab, so ist der Unterschied der Seiten AE nothwendig $< AB$, weil W. $o = p$, $p + y = 2R$, $o + x$ oder $p + x < 2R$, also W. $x < y$.

Fig. 11. 11. Die Summe zweier Seiten im Dreieck ist immer größer als die zweier Linien DA, DB aus einem innern Punkte D nach den Endpunkten der dritten gezogen.

Denn da nach der Verlängerung $AE + EB > AD + DB$, und wiederum $AC + CB > AE + EB$, so ist um so mehr $AC + CB > AD + DB$.

Fig. 11. 12. Der von zwei Dreiecksseiten eingeschlossene Winkel C ist immer kleiner, als der, welchen zwei, von den Endpunkten der dritten nach einem innern Punkte D gezogene, Linien einschließen.

Denn da (nach L. 6) W. $D > E$ und wiederum W. $E > C$, so ist um so vielmehr W. $D > C$.

Fig. 12. 13. Sind in zwei Dreiecken nur zwei Seiten gleich, so liegt dem größern, von demselben gebildeten, Winkel auch die größere dritte Seite gegenüber.

Denn wenn AC = DF, BC = FE, aber W. C > F, und das Dr. AGC = DEF, an AC gelegt und GB gezogen wird, so bilden die Seiten AB, BG, AG das Dr. ABG. In diesem ist aber W. ABG < AGB, weil (nach L. 3) W. BGC = GBC, also > GBA, und als Theil < AGB ist. Daraus folgt endlich (nach L. 8), daß auch AB > AG oder DE sein muß.

14. Sind in zwei Dreiecken nur zwei Seiten gleich, so liegt der größeren dritten Seite AB auch der größere Winkel C gegenüber. Fig. 12.

Denn die Annahme, daß W. ACB = F oder < F sey, widerstreitet (nach L. 13) der Voraussetzung AB > DE.

15. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn eine Seite nebst dem anliegenden und gegenüberstehenden Winkel in beiden gleich sind. Fig. 6.

Denn ist AB = DE, W. B = E und W. C = F, so muß auch FE = CB sein, weil die Annahme von EG oder EK (nach L. 6) in G oder K einen andern Winkel nach sich ziehen und also der Voraussetzung W. F = C widerstreiten würde.

16. Wenn aus einem Punkte C unter verschiedenen Richtungen Linien auf die gerade AB gezogen werden, so ist nur eine Senkrechte möglich und alle derselben gleichweit Abstehenden sind einander gleich. Fig. 13.

Denn I. Wollte man außer CD eine zweite Senkrechte CE annehmen, so würde (gegen L. 6) W. D = E = R sein müssen.

II. Ist DE = DG, so folgt (nach L. 1) daß auch CE = CG ist.

17. Wenn zwei Linien CF, CE ungleich weit von einer Senkrechten CD abstehen, so ist die nächstliegende die kürzeste. Fig. 13.

Denn verlängert man die Senkrechte um DK = CD und zieht KF, KE, so ist (nach L. 1) FK = FC u. EK = EC. Da aber (nach L. 11) (C + EEK > CF FK sein + muß, so folgt, daß auch CE > CF.

18. Wenn in zwei rechtwinklichten Dreiecken CGD und HGI nur die Hypotenusen gleich sind, so steht dem größern Winkel auch die größere Seite gegenüber. Fig. 13

Denn es sei GC = GH, aber W. CGD > W. HGI, so verlängere man CD und HI um gleiche Stücke DK und

IL und ziehe GK, GL. Dann ist (nach L. 13) CK > HL, folglich auch CD > HI.

Fig. 14. 19. Zwei rechtwinklichte Dreiecke sind congruent, wenn die Hypotenuse und eine Cathete in beiden gleich sind.

Denn angenommen, die dritte Seite CB sei < FE, z. B. = FG, so würde auch (nach L. 17) DG < DE oder AB sein.

Fig. 15. 20. Zwei Dreiecke, in denen zwei Seiten nebst einem gegenüberliegenden Winkel gleich sind, sind congruent, wenn die Senkrechte, aus ihrer Ecke auf die dritte Seite innerhalb oder außerhalb beider Dreiecke liegt.

Denn wenn AB = DE, BC = EF (oder BG = EL) dabei AB > BC und der spitze W. A = D, so entstehen durch die Senkrechten die (nach L. 15) congruenten Dr. DEH und ABK, mithin ist EH = BK. Ferner ist (nach L. 19) Dr. BKC = EHF, also KC = HF, und eben so Dr. BKG = EHL, also KG = HL. Im ersten Falle ergiebt sich durch Addition AC = DF, im andern durch Subtraction AG = DL, und daraus (nach L. 1 oder 5), daß Dr. ABC = DEF und Dr. ABG = DEL.

Zusatz. Wenn entweder die dem spitzen Winkel gegenüberliegende Seite BC > AB, oder der W. ein stumpfer ist, so sind die Dreiecke auch ohne die im Lehrsatze hinzugefügte Bedingung congruent, weil dann nicht zwei verschiedene aus den nämlichen Bestandtheilen gebildet werden können.

Anmerkung. Aus den Lehrsätzen 1, 2, 5, 15 u. 20 ergiebt sich, daß unter den sechs Bestandtheilen des Dreiecks drei zur Bestimmung der Figur hinreichen und die andern drei von diesen abhängig sind, sofern nur unter jenen eine Seite vorkommt; daß aber zwei Seiten mit gegenüberliegendem Winkel auch zwei ganz verschiedene Dreiecke bestimmen können und deshalb zweideutige Data sind, so lange nicht eine besondere Bedingung (wie in L. 20) hinzukommt.

250. Lehrsätze über Parallelen und die Winkel im Dreieck.

Fig. 16. 1. Zwei Linien, senkrecht auf einer dritten, sind unter einander parallel.

Denn könnten die Senkrechten DC und EF einander in irgend

einem Punkte durchschneiden, so müßte man von demselben (gegen 249. L. 16) zwei Senkrechte auf AB fällen können.

2. Zwei gerade Linien, welche eine dritte so schneidet, daß die inneren an derselben liegenden Winkel zusammen zwei rechte betragen, sind parallel. Fig. 17

Denn angenommen, sie könnten einander irgendwo treffen, so würden sie über AB ein Dreieck bilden, worin (nach 249 L. 7) gegen die Voraussetzung $o+p$ oder $x+y<2R$ sein müßten.

Zusatz. Wenn die inneren Winkel $x+y=2R$, so sind auch die Wechselwinkel x, o und y, p einander gleich, weil $y+x=y+o$ und $x+y=x+p$. Eben so folgt daraus, daß W. $q=o$ und $r=p$ ist. Der Parallelismus zweier Linien ergiebt sich also auch aus der Gleichheit dieser Winkel.

3. Zwei gerade Linien AC, BD, welche eine dritte AF so schneidet, daß die Summe der innern Winkel weniger als zwei rechte beträgt, treffen hinreichend verlängert, in einem Punkte zusammen. (Euklides elftes Axiom.) Fig. 18.

Denn wenn man sich die Linie AC unbegränzt verlängert und einen Punkt X immer weiter auf derselben fortschreitend denkt, so muß die Verbindungslinie XB immer größere Winkel mit BA bilden, ohne jedoch (nach 249 L. 6) jemals in die parallele Lage BE übergehen zu können. Ist nun W. $GBA<EBA$, so ist die Lage GB für die Dreiecksseite XB möglich und die Linie BD, welche in dieses Dreieck fällt, muß nothwendig die gegenüberstehende Seite AX durchschneiden.

4. Wenn eine Linie zwei Parallelen schneidet, so ist die Summe der inneren Winkel zwei rechten gleich.

Denn angenommen, sie wäre geringer, so müßten (nach L. 3) die Linien einander treffen und könnten also nicht parallel sein.

5. Sind die Schenkel zweier Winkel parallel, so sind die Winkel entweder einander gleich oder Supplementwinkel. Fig. 19.

Denn ist CA mit DB und CF mit DE parallel, so ist

I. (nach L. 4) W. $o=p=q$; und

II. W. x. als Nebenw. von q auch Supplementw. von o.

6. Zwei Linien, einer dritten parallel, sind es auch unter einander. Fig. 20

Denn da (nach der Voraussetzung und L. 5) W. $o=p$ und W. $q=p$ ist, so folgt, daß auch W. $o=q$, also AB der CD parallel sein muß.

Fig. 21. 7. Der äußere Winkel eines Dreiecks ist den beiden inneren entgegengesetzten zusammen gleich.

Denn wenn BE mit AC parallel gezogen wird, so ist W. o = r und W. q = p, also W. CBD = r + p

Zusatz. Wenn von einem Punkte C auf eine gerade Linie AB mehrere geneigte Linien gezogen werden, so schließt die der Senkrechten nähere den größeren Winkel mit AB ein. (Fig. 13).

8. Die drei Winkel eines Dreiecks sind zusammen zwei rechten gleich.

Denn nach Vorigem ist W. r + p + x = o + q + x d. h. = 2R.

Zusätze. Demnach ist jeder W. im gleichseitigen Dr. = $\frac{2}{3}$R, und jeder W. an der Grundlinie eines gleichschenkl. Dreiecks, wenn dessen gleiche Seiten den W. A einschließen, = $\frac{1}{2}$(2R − A) = R − $\frac{1}{2}$A. Auch folgt, daß wenn zwei Winkel in zwei Dreiecken übereinstimmen, der dritte dem dritten gleich sein müsse. Sind die W. B und C gegeben, so findet man A = 2R − (B + C), und ist einer der Winkel, z. B. A, ein rechter, so muß die Summe der andern B + C = R sein.

251. Lehrsätze über Linien im Dreieck.

Fig. 22. 1. Durch die aus dem Scheitel eines gleichschenkligen Dreiecks auf die gegenüberstehende Seite gefällte Senkrechte werden Grundlinien und Scheitelwinkel halbirt.

Denn es ist (nach 249 L. 15) Dr. ADC = BDC, folglich auch AD = DB und W. x = y.

Fig. 22. 2. Eine aus der Mitte der Grundlinie eines gleichschenkligten Dreiecks gezogene Senkrechte halbirt den gegenüberstehenden Winkel.

Denn die nach Vorigem auf den Punkt D fallende muß mit der auf D errichteten Senkrechten (nach 245 L. 1) nothwendig zusammenfallen.

Fig. 23. 3. Die Senkrechten aus der Mitte der Dreiecksseiten schneiden einander im nämlichen Punkte: der von den Ecken gleichweit entfernt ist.

Denn sind aus E, D die Senkrechten EM, DM gezogen, so

ist AMD = BMD und AME = CME, also BM = AM = CM, und Dr. BMC gleichschenklich. Es muß folglich auch (nach L. 2) die Senkrechte FM den Punkt M treffen.

4. Die Senkrechten, aus den Spitzen eines Dreiecks auf seine Seiten gefällt, schneiden einander im nämlichen Punkte. Fig. 24.

Denn zieht man durch die Ecken des Dr. mit seinen Seiten die Parallelen DE, EF, FD, so zerfällt das Hülfsdreieck DEF in vier congruente Dreiecke, und es ist EC = CD, EA = AF, DB = BF. Wenn nun (nach L. 3) die im Dr. DEF aus A, B, C errichteten Senkrechten einander im Punkte M treffen, so gilt das Nämliche von den aus A, B, C auf die Seiten des Dr. ABC gefällten, weil diese mit jenen zusammenfallen müssen.

5. Das von drei, auf den Seiten eines Dreiecks errichteten, Senkrechten gebildete Dreieck ist mit diesem gleichwinklig. Fig. 25.

Denn da W. ENF mit PNO und auch mit EAF zwei R bildet, so folgt, daß W. N = A, und aus gleichen Gründen, daß P = B, und O = C.

6. Die in einem Dreieck unter gleichen Winkeln gezogenen Linien bilden ein inneres gleichwinkliges Dreieck. Fig. 26.

Denn da x = y = z, so folgt, daß W. a = o + z = o + x, und eben so, daß W. b = B, W. c = C.

7. Die Linien, welche die Winkel eines Dreiecks halbiren, schneiden sich im nämlichen und von den Seiten gleichweit entfernten Punkte. Fig. 27.

Denn treffen sich die Halbirungslinien aus A und B in M und werden aus M die Senkrechten MD, ME, MF gefällt, so folgt, die Gleichheit dieser Linien aus der Congruenz der Dr. AME, AMD und BMD, BMF. Dann ist, wenn man MC zieht, auch (nach 249 L. 19) Dr. CMF = CME, also W. C gleichfalls halbirt.

252. Viereck. Nächst dem Dreieck ist die einfachste Figur die von vier Linien gebildete, die unter eben so vielen Winkeln zusammentreten — das Viereck. Sind seine vier Seiten einander paarweise parallel, so wird es Parallelogramm, sind nur zwei parallel, Trapezium genannt. Die

Betrachtung dieſer Figur beruht auf den Lehrſätzen über die Congruenz und Eigenſchaften der Dreiecke, ſo wie der Parallelen.

253. Lehrſätze über das Viereck.

Fig. 28. 1. Die Summe aller Winkel eines Vierecks beträgt vier rechte.

Denn zieht man die Diagonale AC, ſo zerfällt das Viereck in zwei Dreiecke, und da deren jedes 2R zur Winkelſumme hat, ſo iſt W. (A+B+C+D) = 4R.

Zuſatz. Mit drei Winkeln eines Vierecks iſt alſo auch der vierte gegeben, und ſind alle vier einander gleich, ſo iſt jeder ein rechter. Es iſt alſo ein Viereck mit vier rechten Winkeln möglich, das man Rechteck oder Rectangel nennt.

Fig. 28. 2. Congruente Vierecke können in congruente Dreiecke zerlegt, und aus ſolchen zuſammengeſetzt werden, wenn die Dreiecke mit einer Seite zuſammenfallen.

Denn wenn die Seiten AB, BC, CD, DA einzeln = EF, FG, GL, LE; und die W. A, B, C, D = E, F, G, L; ſo folgt, daß Dr. ABC = EFG, und ACD = ELG. Oder umgekehrt, wenn dieſes Vorausſetzung iſt, daß ABCD = EFGL.

Fig. 28. 3. Vierecke ſind congruent, wenn zwei Seiten AD, AB und EL, EF nebſt dem eingeſchloſſenen Winkel in ihnen gleich und die anliegenden Winkel rechte ſind.

Denn zieht man BD und FL, ſo iſt (249 L. 1) Dr. ABD = EFL, und weil daraus gleiche Winkel in den Dr. BCD und FGL folgen auch (249 L. 2) das eine mit dem andern congruent. Dann ſind es aber auch (nach L. 2) die Vierecke.

Fig. 29. 4. Im Parallelogramm ſind die gegenüberliegenden Seiten und Winkel einander gleich und dieſe werden von der Diagonale halbirt.

Denn es ſind die Wechſelwinkel x, y und o, p einander gleich, alſo Dr. ABC = ADC und folglich AB = DC, AD = BC, W. B = D und A = C.

Zuſatz. Ein Parallelogramm, worin alle vier Seiten gleich ſind und unter rechten Winkeln zuſammentreten, wird ein Quadrat genannt.

5. Wenn zwei gegenüberstehende Seiten im Viereck einander gleich und parallel sind, so müssen es auch die beiden anderen sein und die Figur ist mithin ein Parallelogramm. Fig. 29.

Denn da die Parallelen AB, CD mit der Diag. AC gleiche Wechselwinkel bilden, so ist Dr. ABC = ADC.

6. Die beiden Diagonalen im Parallelogramm halbiren einander. Fig. 29.

Denn es ist (nach 249 L. 2) Dr. AMB = DMC, also MA = MC, und MB = MD.

7. Zwei Parallelogramme sind congruent, wenn zwei Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel in beiden gleich sind. Fig. 29.

Denn wenn man die Diag. AC, EG zieht, so folgt aus der Congruenz der Dreiecke die der Parall.

Zusätze. I. Quadrate über gleichen Seiten sind congruent.

II. Die Diagonalen eines Quadrats zerlegen dasselbe in vier rechtwinkl. congruente Dreiecke.

III. Der Halbirungspunkt der Diagonalen im Quadrat liegt von seinen Ecken, so wie von seinen Seiten gleich entfernt.

254. Vielecke. Jede Figur, aus mehr als vier Seiten zusammengesetzt, rechnet man zu der allgemeinen und unbegränzten Classe der Vielecke oder Polygone und darf, um auf sie die bisherigen Sätze auszudehnen, nur eine Theilung in Drei- oder Vierecke durch Diagonalen vornehmen. Hat die Figur allgemein n Seiten, so werden einer beliebigen Ecke derselben (n—2) Seiten gegenüber liegen, die durch Ziehung sämmtlicher Diagonalen aus jener Ecke zu Grundlinien von (n—2) Dreiecken werden. Nimmt man aber im Innern des Polygons einen Punkt an, um von demselben nach allen n Ecken gerade Linien zu ziehen, so ist dadurch das Vieleck in n Dreiecke zerlegt worden.

255. Lehrsätze über die Polygone.

1) Die Summe aller Winkel in einem Vieleck beträgt sovielmal 2R, als es Seiten hat, weniger zwei. Fig. 30.

Denn da ein n-Eck durch Diagonalen in (n—2) Dreiecke zer-

fällt werden kann, deren jedes 2R enthält, so ist die Summe seiner inneren Winkel = (n—2) 2R.

Zusatz. Die Winkel im Fünfeck betragen demnach 6R, im Sechseck 8R, im Siebeneck 10R, u. s. w.

Fig. 30. 2. Die Summe der äußeren durch Verlängerung der Seiten entstehenden Winkel eines Vielecks ist immer vier rechten gleich, sofern es keine einspringenden Winkel hat.

Denn da die inneren W. = (n—2) 2R und die an den n Ecken liegenden inneren und äußeren, als Nebenwinkel n.2R betragen, so bleiben nach Abzug der inneren, für die äußeren allein 4R übrig.

Fig. 30. 3. Congruente Polygone können in congruente Dreiecke zerlegt, und aus solchen zusammengesetzt werden.

Beweis, wie in 253. L. 2.

Fig. 31. Zusatz. Aus n gleichschenkligten congruenten Dreiecken läßt sich ein reguläres Polygon bilden, wenn jeder Winkel an der Spitze $= \frac{4R}{n}$, weil alsdann eine geschlossene Figur von n gleichen Seiten entsteht, die unter gleichen Winkeln zusammentreten.

Fig. 13. 4. Wenn in einem regulären Polygon die Winkel halbirt werden, so laufen die Theilungslinien im Mittelpunkte der Figur zusammen.

Denn über den n Seiten der Figur werden dadurch in derselben n gleichschenklichte Dr. gebildet, die (nach 249 L. 2) sämmtlich congruent sind, und deren Spitzen also, gleichweit von den Ecken, wie von den Seiten der Figur abstehend, im Mittelpunkte derselben sich vereinigen müssen.

Zusatz. Die am Mittelpunkte eines regul. Polygons auf diese Weise gebildeten gleichen Winkel werden Centriswinkel im Gegensatze der von seinen Seiten gebildeten Polygonwinkel genannt.

256. Aufgaben über die Lehrsätze von den geradlinigen Figuren.

Fig. 32. 1. Aus drei gegebenen Linien a, b, c, ein Dreieck zu bilden.

Ist dieß (nach 249 L. 10) möglich, so beschreibe man aus den Endpunkten von c zwei Kreisbögen mit a und b als Radien. Die

beiden dadurch entstehenden Dr. ABC und ABD sind congruent. Beweis aus 249 L. 5.

2. An eine gerade Linie DF einen gegebenen Winkel C zu tragen. Fig. 33.

Ebenfalls durch Hülfe eines Kreisbogens mit beliebigem Radius DF = CB, worauf EF = AB abgeschnitten wird. Aus Dr. EDF = ACB folgt W. D = C.

3. Eine gegebene Linie AB in zwei gleiche Theile zu theilen. Fig. 22.

Werden auf beiden Seiten der Linie die gleichschenkl. Dr. ABD und ABG gebildet und D und G verbunden, so ist Dr. ADG = DGB, also W. x = y und (nach 249 L. 1) AD = DB.

4. Aus dem Punkte D einer geraden Linie AB eine Senkrechte zu errichten. Fig. 22.

Sind zu beiden Seiten willkührlich DA = DB abgetragen und aus A und B mit einer Linie > AD Kreisbogen beschrieben, die einander in C schneiden, so ist CD die Senkrechte, weil Dr. ACD = BCD, also W. p = q = R.

5. Einen gegebenen Winkel ACB zu halbiren. Fig. 22.

Trägt man auf den Schenkeln des W. C die gleichen Längen CA, CB ab, und beschreibt über AB das gleichschenkl. Dr. ABG, so halbirt die CG den W. in Folge der Congruenz der Dreiecke ACG und BCG.

6. Aus dem Punkte C auf die gerade Linie AB eine Senkrechte zu fällen. Fig. 22.

Zieht man willkührlich die geneigte Linie CA, mit dieser den Kreisbogen AB, so daß CB = CA und halbirt (nach A. 5) den Winkel ACB, so ist Dr. ACD = BCD, folglich DC senkrecht auf AB.

7. Aus zwei Seiten a, c und einen gegenüberliegenden Winkel A ein Dreieck zu construiren. Fig. 15.

Man lege an den einen Endpunkt von c den Winkel A und beschreibe aus dem andern mit a den Kreisbogen GC, so wird die Aufgabe eine zweifache Lösung gestatten, wenn a größer ist, als die Senkrechte BK, nur eine einzige, wenn a = BK und gar keine, wenn a < BK sein sollte.

8. Durch einen Punkt A eine Parallele mit der Linie BE zu ziehen. Fig. 17.

Man lege an die beliebig gezogene AB die Winkel p = r nach A. 2.

Fig. 29. 9. Aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel ein Parallelogramm zu beschreiben.

Geschieht nach Aufg. 2 und 8.

Fig. 30. 10. Ein Polygon GH..M zu construiren, das mit einem gegebenen AB...F congruent sei.

Man ziehe die willkührlichen Diagonalen AE, EB, BD, mache (nach A. 1) GML = AFE, dann GLH = AEB, und fahre so fort, das Polygon aus congruenten Dreiecken zusammenzusetzen.

Drittes Kapitel.

Der Kreis.

Fig. 34. 257. Erklärungen. Die gerade Linie, welche irgend zwei Punkte des Kreises, wie B, D, mit einander verbindet, wird Sehne oder Chorde, und wenn sie, wie AB, durch den Mittelpunkt geht, des Kreises Durchmesser oder Dicmeter genannt. Unter Secante versteht man jede den Kreis durchschneidende, also theils außer theils in demselben liegende gerade Linie, wie EF; unter Tangente aber eine solche, die nur einen einzigen Punkt mit dem Kreisumfange gemein hat oder dieselbe in diesem einen Punkte berührt, wie BE. Kreise, die nur einen Punkt gemeinschaftlich haben, heißen Berührungskreise, fallen ihre Mittelpunkte zusammen, so werden sie concentrisch, im Gegentheil excentrisch genannt. Eine, die Mittelpunkte von zwei excentrischen Kreisen verbindende, gerade Linie nennt man die Achse derselben. Durch die geschlossene Verbindung von drei oder mehreren solchen entsteht eine dem Kreise eingeschriebene Figur, wie AHDBF, durch die geschlossene Verbindung von Tangenten hingegen eine demselben umschriebene, wie EKIG. Umgekehrt kann man im ersten Falle den Kreis als die umschriebene, im zweiten als die eingeschriebene Figur betrachten.

258. Lehrsätze über die Sehnen im Kreise.

1. Durch jeden Durchmesser AB entstehen zwei congruente Halbkreise. Fig. 34.

Denn denkt man sich den Bogen ADB auf AFB gelegt, so müßten bei der Annahme, daß beide einander nicht deckten, Punkte des einen oder andern nicht gleichweit vom Mittelpunkte entfernt sein, was dem Begriffe der Kreislinie widerstreitet.

2. Der Durchmesser ist die größte aller Sehnen. Fig. 35.

Denn jede andere Sehne FG ist kleiner, als FC + CG d. h. als AB.

3. Zu gleichen Bogen gehören gleiche Sehnen, und umgekehrt. Fig. 35.

Denn I. denkt man ADB auf AEB gelegt, so muß wegen der gleichen Bogen BG und BK der Punkt K in G fallen, also auch die Sehne BK in BG.

II. Die Dr. CGB und CKB sind wegen ihrer gleichen Seiten congruent, also die, mit dem nämlichen Radius beschriebenen und gleichen Winkeln gegenüberst., Bogen BK und BG ebenfalls.

4. Dem größeren Bogen entspricht die größere Sehne, und umgekehrt. Fig. 35.

Denn I. da der Bogen (nach 244) den Winkel am Centrum mißt, so folgt das Eine aus 249. L. 13., und II. das Andere daraus, daß nach I unmöglich der kleineren Sehne der größere Bogen entsprechen kann.

5. Der auf der Sehne FG senkrechte Radius CE theilt Sehne und Bogen in zwei gleiche Theile. Fig. 35.

Denn da (nach 249. L. 19) Dr. CLF = CLG, so ist auch FL = LG; und da ferner (249 L. 1) Dr. ELF = ELG, so folgt, daß FE = EG also auch Bogen FE = EG.

Zusatz. Der Mittelpunkt des Kreises (C) und die Mitte des Bogens (E) so wie der zugehörigen Sehne (L) liegen also in der nämlichen geraden Linie.

6. Zwei gleiche Sehnen FG und HK sind vom Centrum gleichweit entfernt, und von zwei ungleichen ist die kleinste die entfernteste. Fig. 35.

Denn I. In den gleichschenkl. congruenten Dr. CGF und CHK ist (nach 249. L. 19) die Senkrechte CI = CL.

II. Da die kleinere Sehne HD auch auf dem kleineren Bogen steht, so fällt D zwischen H und K, also die Sehne HD zwischen Sehne und Bogen HK: folglich ist CP > CO, > CI.

Fig. 36. 7. Zwei Sehnen AF, BE, die nicht Durchmesser sind, können einander nicht halbiren.

Denn angenommen, D wäre die Mitte von AF und von BE, so müßte CD eine Senkrechte auf beiden Sehnen zugleich sein, welches unmöglich ist.

259. Lehrsätze über die Secanten und Tangenten.

Fig. 35. 1. Eine gerade Linie HK kann den Kreis in nicht mehr, als zwei Punkten durchschneiden.

Denn angenommen, es gäbe mehrere Durchschnittspunkte, H, O, I, K, so müßten sie vom Centrum gleich weit entfernt und zugleich in gerader Linie liegen, welches (nach 249. L. 16) unmöglich ist.

Fig. 37. 2. Zwei parallele Secanten DE, FG, haben zwei gleiche Bogen des Kreises zwischen sich.

Denn die Senkrechte CB halbirt die Bogen FBG und DBE, so daß FB — DB = GH — EB.

Fig. 37. 3. Die, an dem Endpunkte des Radius CB gezogene, Senkrechte BK ist Tangente des Kreises.

Denn da jede beliebige Hypotenuse CK > CB, so hat die Senkrechte BK keinen andern, als den Punkt B mit der Kreislinie gemein.

Zusatz. Es läßt sich in B auf CB nur eine Senkrechte, also auch nur eine Tangente denken, und jede andere gerade Linie müßte als Secante den Kreis in zwei Punkten treffen.

Fig. 37. 4. Zwei aus einem Punte K an den Kreis gezogene Tangenten KB, KE sind einander gleich.

Denn die Dr. CBK und CEK sind (nach 249. L. 19) congruent.

Zusatz. In einem aus zwei Radien und zwei Tangenten gebildeten Viereck CBKE halbirt also die Secante KC die Figur und ihre Winkel in C und K.

260. Lehrsätze über zwei Kreislinien.

1. Zwei Kreise, die einander schneiden oder berühren, können keinen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben. Fig. 38.

Denn nimmt man einen solchen in C an, so müßten CA und CB beide = CD sein, welches unmöglich ist.

2. Wenn zwei Kreise in zwei Punkten, A und B, einander schneiden, so steht ihre Achse CD senkrecht auf der gemeinschaftlichen Sehne AB und halbirt dieselbe. Fig. 39.

Denn die, durch die Mitte G der Sehne AB senkrecht gezogene Linie muß (nach 258 L. 5) durch die Mittelpunkte der Kreise führen und ist folglich deren Achse.

3. Wenn zwei Kreise einander berühren, so geht ihre Achse durch den Berührungspunkt. Fig. 40.

Denn nimmt man das Gegentheil und z. B. die Mittelp. in C und D an, so daß CD nicht durch B führt, so wäre CE = CB, DG = DB, also:

I. CE + EG + GD, d. i. CD ⊳ CB + BD.

II. CD + DB oder CD + DG ⊳ CB und mithin auch ⊳ CE, woraus DG ⊳ DE folgt; welches beides unmöglich ist.

4. Wenn die Entfernung der Mittelpunkte M, D zweier Kreise der Summe ihrer Radien gleich ist, so berühren sie einander von außen. F. 40. I.

Denn auf einer in B errichteten Senkrechten BK, die (nach 259 L. 3) beider Kreise Tangente ist, liegt jeder Punkt außer denselben, so daß ihnen nur B gemeinschaftlich sein kann.

5. Wenn die Entfernung der Mittelpunkte M, D zweier Kreise dem Unterschiede ihrer Radien gleich ist, so berühren sie einander von innen. F. 40. II.

Sie können außer dem Punkte B keinen zweiten gemein haben, weil wenn man irgend einen Punkt K der Senkrechten BK mit M und D verbindet, die Abstände der Kreise von demselben, KO, KP, verschieden sein müssen: denn es ist W. D ⊳ W. M. also (nach 250 L. 8) W. MBP ◁ W. MBO, und deshalb der Punkt P des Dr. DBP nothwendig im Dreieck MBO enthalten, so daß er nicht mit O zusammenfallen kann.

6. Wenn die Entfernung der Mittelpunkte geringer ist, als die Summe der Radien, und größer, als ihr Unterschied, so schneiden beide Kreise einander in zwei Punkten. Fig. 39

Denn in dieſem Falle iſt (nach 249 L. 10) die Bildung eines Dreiecks aus der Entfernung CD und den Radien CA, DA an beiden Seiten der Achſe möglich, wodurch die Durchſchnittspunkte A und B entſtehen.

261. Lehrſätze über die Winkel im Kreiſe.

Fig. 37. **1. Zu gleichen Winkeln am Mittelpunkte eines Kreiſes gehören gleiche Sehnen, und umgekehrt.**

Denn es folgt aus der Congruenz der Dr. DCB, ACE I. (nach 249 L. 1), daß DB = BE; II. (nach 249 L. 5) daß W. DCB = W. ECB.

Fig. 41. **2. Der von zwei Sehnen gebildete Winkel am Umfange des Kreiſes, ADB, iſt halb ſo groß, als derjenige am Mittelpunkte, ACB, deſſen Schenkel auf demſelben Bogen AB ſtehen.**

Denn wenn man den Diameter DF zieht, ſo iſt (nach 250 L. 7) W. ACF = CAD + CDA, oder (nach 249 L. 3) = 2CDA; und eben ſo W. BCF = CDB + DBC oder = 2CDB; alſo die Summe ACB = 2ADB. Eben ſo kann man es für die Winkel ADB′ und ACB′ durch Abziehen beweiſen.

Fig. 41. **3. Alle auf gleichem Bogen AB ſtehende Peripheriewinkel G, D, H, K... ſind einander gleich.**

Denn jeder iſt nach dem Vorigen = ½ ACB.

Fig. 41. **4. Alle auf den Endpunkten eines Durchmeſſers ruhende Peripheriewinkel ſind rechte.**

Denn zieht man durch den W. ABK den Durchmeſſer BG, ſo iſt (L. 2) W. ABG = ½ACG u. W. KBG = ½KCG, alſo W. ABK = ½(ACG + KCG), d. i. = R.

Fig. 41. **5. Um jedes beliebige Dreieck ABD läßt ſich ein Kreis beſchreiben.**

Denn betrachtet man eine beliebige Seite AD, welche einem ſpitzen W. B gegenüberliegt als Sehne des Kreiſes, ſo iſt über ihr ein gleichſchenkl. Dreieck ADC möglich, worin W. ACD = 2 W. ABD, und demnach (L. 2) B ein Punkt des aus C mit CA beſchriebenen Kreiſes.

Fig. 42. **6. Die gegenüberſtehenden Winkel eines im Kreiſe beſchriebenen Vierecks ABDE betragen zuſammen zwei rechte.**

Denn da die beiden (doppelt ſo großen) Kreisbogen zuſammen

die ganze Peripherie ausmachen oder 4R messen, so sind A + D oder B + E = 2R.

Zusatz. Ein durch drei Punkte eines Vierecks, dessen gegenüberstehende Winkel 2R betragen, gelegter Kreis muß also auch durch den vierten führen.

7. Jeder, auf einer Sehne AB stehende, Peripheriewinkel ist dem, von ihr und einer Tangente gebildeten, Winkel ABL gleich. Fig. 41.

Denn es ist, wenn der Diam. BG gezogen wird, W. GAB = R und nach Voraussetzung auch W. GBL = R, also W. AGB = ABL, weil beide mit W. ABG einen rechten ausmachen. Ist aber W. G = ABL, so gilt (nach L. 3) dasselbe von D, H, K u. s. w.

8. Der auf einer Sehne BE ruhende Centriwinkel ist Supplement des von den Tangenten eingeschlossenen. Fig. 37.

Denn die Summe der W. C + B + K + E = 4R, weniger B + E = 2R, läßt für W. C + K zwei R übrig.

262. Lehrsätze über die regulären Polygone.

1. In jedes reguläre Polygon kann ein Kreis beschrieben werden.

Denn die auf der Mitte der Seiten errichteten Senkrechten müssen (nach 255 L. 4) einander im Mittelpunkt der Figur treffen und gleich sein: mit einer solchen als Radius läßt sich mithin ein Kreis im Innern der Figur construiren, deren Seiten dann als Tangenten zu betrachten sind.

2. Um jedes reguläre Polygon kann ein Kreis beschrieben werden.

Denn (nach 255 L. 4) läßt sich ein von allen Ecken der Figur gleichweit entfernter Mittelpunkt derselben finden und aus diesem durch jene Eckpunkte ein Kreis legen, worin die Seiten des Polygons als Sehnen erscheinen.

3. In jeden Kreis kann ein reguläres Polygon beschrieben werden.

Denn wenn man durch die vorgeschriebene Anzahl von allgemein n Seiten die Winkelsumme am Centrum = 4R dividirt, so erhält man den Centriwinkel eines eingeschriebenen regul. n-Ecks und durch dessen Sehne die Seiten desselben.

4. Um jeden Kreis kann ein reguläres Polygon beschrieben werden.

Denn wenn die Theilungslinien der n Centriwinkel als Radien bis zum Umfange des Kreises gezogen sind, so darf man nur an deren Endpunkte Tangenten ziehen, die (nach 259 L. 4) unter gleicher Länge einander durchschneiden und das n-Eck bilden müssen.

263. Aufgaben über die Lehrsätze vom Kreise.

Fig 35. 1. Einen gegebenen Kreisbogen HDK in $2,4,8 \ldots 2^n$ gleiche Theile zu theilen.

Man fälle auf die Sehne HK eine Senkrechte CF, dann auf die Sehne HD des halben Bogens die Senkrechte CP, und setze dieses Verfahren bis zur Anzahl der verlangten Halbirungen fort.

Fig. 37. 2. Den Mittelpunkt zu einem gegebenen Kreisbogen FBG zu finden.

Man ziehe willkührlich zwei Sehnen EB, ED und durch ihre Mitte die Senkrechten BC, KC, so ist (nach 258 L. 5) C das Centrum des Bogens FBG.

Fig. 43. 3. Eine Tangente aus dem gegebenen Punkte K an den Kreis C zu ziehen.

Man construire mit KA = KC, und AC = 2BC als Grundlinie, die gleichschenkl. Dreiecke ACK, ECK, so müssen KB, KD Senkrechte, also auch Tangenten sein.

Fig. 27. 4. Einen Kreis in ein gegebenes Dreieck zu beschreiben.

Man erhält nach Halbirung der Winkel in der Senkrechten MD den gesuchten Radius, weil (nach 251 L. 7) MD = ME = MF.

Fig 41. 5. Ueber einer gegebenen Linie AB einen Kreisbogen zu construiren, dessen (auf demselben ruhende) Peripheriewinkel einem gegebenen W. x gleich sein sollen.

Man lege x = ABL an einen Endpunkt der AB, ziehe senkrecht auf BL die Linie BG und dann GA, so ist W. G, also auch W. D, H, K.... (nach 261 L. 3, 7) = x.

F. 44 I. 6. Um einen gegebenen Kreis ein Dreieck zu construiren, das mit einem andern ABC gleichwinklig sei.

Man ziehe den Radius OD und lege daran (nach 261 L. 8) die Nebenwinkel von A und C in x' und x'', so sind D, E und F die Berührungspunkte für drei Tangenten, die das gleichwinklichte Dreieck bilden.

7. In einen gegebenen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, F.44. II. das mit einem andern ABC gleiche Winkel habe.

Man lege nachdem an einen beliebigen Punkt D die Tangente GK gezogen worden, (nach 261 L. 7) W. A an D in x, W. C an D in z, so ist auch E = C, F = A, mithin der dritte W. EDF = B.

8. Ein Quadrat in und um den Kreis zu beschreiben. Fig. 45,

a) Da der Centriwinkel hier = R sein muß, so verbinde man die Endpunkte zwei einander senkrecht schneidender Durchmesser AB, DE.

b) Man ziehe Tangenten an A, D, B, E.

9. Ein reguläres Sechseck in und um den Kreis zu beschreiben. Fig. 46.

a) Da der Centriwinkel hier $\frac{4R}{6} = \frac{2}{3}$ R oder 60° betragen muß und ein gleichschenkl. Dreieck mit solchem Winkel an der Spitze auch gleichseitig ist, so darf man nur den Radius AC als Sehne im Kreise abtragen, welches sechsmal geschehen kann.

b) Indem man Tangenten an die sechs Punkte im Umfang legt, entsteht das umschriebene Sechseck.

10. Ein reguläres Dreieck in und um den Kreis zu beschreiben. Fig. 46.

Man verbinde in der vorigen Construction nur die Punkte A, E, F und verlängere die daran gelegten Tangenten. Auch kann man nach Aufg. 6 und 7 verfahren.

Viertes Kapitel.

Die Aehnlichkeit der Figuren.

Fig. 47. 264. **Erklärungen.** Wenn die Verbindungslinien der Ecken zweier Figuren ABC, abc in dem nämlichen Punkte O zusammentreffen oder convergiren, so nenne man dieselben **Convergenten** und ihren gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt den **Convergenzpunkt** der Figuren. Die beiden, auf der nämlichen Convergente liegenden Ecken, (A, a; B, b; C, c;) und Abschnitte (AO, aO; BO, bO; CO, cO) mögen **homolog** genannt werden. Dann versteht man unter **ähnlichen Figuren** solche, die so gelegt werden können, daß alle, durch homologe Ecken gezogene, Convergenten **verhältnißgleich** (proportionirt) von den Seiten der Figuren geschnitten werden, oder daß alle homologen Abschnitte in dem nämlichen Verhältniß stehen

Fig. 48. $\left(\frac{AO}{aO} = \frac{BO}{bO} = \frac{CO}{cO}\right)$. Unter dieser Bedingung dürfen also die Vielecke ABCD, abcd einander ähnliche heißen, nicht aber, wenn eines der Verhältnisse, z. B. $\frac{DO}{dO}$, von den übrigen verschieden wäre. Der Convergenzpunkt kann ebenfalls in dem Umfange beider Figuren, als inner- oder

Fig. 49. außerhalb derselben liegen; bei der Annahme, daß ähnliche Figuren mit einer Ecke in einander fallen, fordert der Begriff der Aehnlichkeit, daß die **einschließenden** Seiten (als homologe Abschnitte der Convergenten) verhältnißgleich seien.

Gerade Linien kann man gar nicht ähnlich nennen, ihnen aber eine **ähnliche Lage** zuschreiben, wenn die homologen Abschnitte der Convergenten, welche ihre Endpunkte verbinden, verhältnißgleich, d. h. wenn die **längeren** Gleichvielfache der **kürzeren** sind. Zwei Kreise sind nach obiger Definition wegen des gleichen Verhältnisses aller ihrer Radien, die man aus dem gemeinschaftlichen Centrum- als Convergenzpunkte, gezogen denken kann, nothwendig ähnliche Figuren. Die Aehnlichkeit wird durch das Zeichen $\sim$ angedeutet.

265. Lehrsätze von den Convergenten.

1. Zieht man durch die Endpunkte zweier Parallelen (AB, TK) Convergenten, so sind die homologen Abschnitte derselben verhältnißgleich. Fig. 50.

Denn man denke sich die Linie OB in n gleiche Theile OD, DE, EF.... getheilt, die Parallelen DP, EQ... und aus P, Q... die Linien Pp, Qq... mit OB parallel gezogen, so ist (253 L. 4) Pp=DE, Qq=EF...also OD=Pp=Qq... und da die Winkel an P, Q, R... (nach 250 L. 5) denen an A und O gleich sein müssen; Dr. ODP=PpQ=QqR u. s. w. Folglich ist OP=PQ=QR..., d. h. die Seite AO durch die Parallelen in eben so viele gleiche Theile getheilt, als OB; und demnach OB:OD=OA:OP, oder allgemeiner, wenn man durch die Parallele KT auf OB eine Länge =m.OD abgeschnitten denkt, wonach OT=m.OP sein muß: I. OB:OK=OA:OT; und hieraus (nach 67) II. OB:OA=OK:OT.

2. Sind die homologen Abschnitte der Convergenten zweier Linien (AB, TK) verhältnißgleich, so sind diese Linien parallel. Fig. 50.

Denn angenommen, eine andere Linie UK sei der AB parallel, so folgt aus dem vorigen Satze die Proportion OK:OB =OU:OA, welche der Voraussetzung OK:OB=OT:OA widerspricht, also unmöglich ist.

3. Sind die Abschnitte auf den Convergenten der Linien AB, ab verhältnißgleich, so stehen beide Linien selbst zu einander im Verhältniß jener Abschnitte. Fig. 51.

Denn zieht man au A und a mit OB die Parall. AC, ac, so wie OC par. AB, so ist (250 L. 5) Oc=ba, OC=BA also; I. Oa:OA=Ob:OB; II. Oa:OA=Oc:OC; folglich Ob:OB=Oc:OC d. i. =ab:AB.

4. Sind zwei Parallelen AB, ab mit den Abschnitten einer, durch ihre Anfangspunkte gelegten, Linie AO verhältnißgleich, so ist O der Convergenzpunkt für die, durch die Endpunkte gezogene Linie Bb. Fig. 52.

Denn angenommen, die verlängerte Bb führe durch einen andern Punkt P, so hätte man (L. 1) AP:aP=BP:bP und (L. 3) AP:aP=AB:ab. Aus der Voraussf. AO:ao =AB:ab würde also folgen, daß AP:aP=AO:aO oder

(nach 67) $AP - aP : aP = AO - aO : aO$, d. i. $Aa : aP = Aa : aO$, welches unmöglich ist, wenn O und P nicht zusammenfallen.

Zusatz. Wenn die Schenkel zwei paralleler Winkel ABC, abc verhältnißgleich mit den Stücken OB, Ob ihrer Achse abgeschnitten werden, so convergiren die verlängerten Linien Aa, Bb im Punkte O.

266. Lehrsätze über die Aehnlichkeit der Dreiecke.

Fig. 53. 1. Zwei Dreiecke ABC, $\alpha\beta\gamma$ sind ähnlich, also auch ihre homologen Seiten verhältnißgleich, wenn sie gleiche Winkel haben.

Denn unter dieser Voraussetzung kann man $\alpha\beta\gamma$ so in ABC gelegt denken, daß W. A und a einander decken; da nun $b = B$, $c = C$ sein soll, so ist bc par. BC, und $ba : BA = ca : CA$, folglich Dr. abc ∽ ABC.

Fig. 53. 2. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn in ihnen ein Winkel gleich und die einschließenden Seiten verhältnißgleich sind.

Denn es ist (265 L. 2) wenn man W. a in A legt, bc par. BC, folglich abc ∽ ABC, weil auch W. $b = B$ und $c = C$.

Fig. 53. 3. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn ihre Seiten verhältnißgleich sind.

Denn aus der Voraussetzung $\frac{\alpha\beta}{AB} = \frac{\alpha\gamma}{AC}$ folgt, daß wenn man $ab = \alpha\beta$ auf AB, und $ac = \alpha\gamma$ auf AC abschneidet, die Linie bc par. BC, folglich (nach 265 L. 2) $\frac{bc}{BC} = \frac{ab}{AB}$ sein müsse.

Da nun auch nach Voraussetzung $\beta\gamma : BC = \alpha\beta : AB$ und $\alpha\beta = ab$, so ist nothwendig $\beta\gamma = bc$, also $\alpha\beta\gamma$ ∽ ABC.

Fig. 53. 4. Zwei Dreiecke derselben Art (d. h. beide spitz-, stumpf- oder rechtwinklicht) sind ähnlich, wenn sie zwei verhältnißgleiche Seiten und einen nicht davon eingeschlossenen gleichen Winkel haben.

Sei $\alpha\beta : AB = \beta\gamma : BC$, W. $A = \alpha$, und denke man sich die Dr. mit diesen W. in einander gelegt also $ab = \alpha\beta$, $bc = \beta\gamma$, so folgt (249 L. 20), daß Dr. $abc = \alpha\beta\gamma$, also $ac = \alpha\gamma$, und (L. 2) daß Dr. $\alpha\beta\gamma$ ∽ ABC.

Zusatz. Zwei rechtwinkl. Dreiecke sind also ähnlich, wenn die Hypotenuse und eine Cathete in beiden verhältnißgleich sind.

267. Lehrsätze über Linien im Dreiecke.

1. Die aus der Spitze C eines Dreiecks willkührlich auf die gegenüberstehende Seite A B gezogenen Transversalen theilen eine, derselben parallel gezogene, ab, mit ihr verhältnißgleich. Fig. 54.

Denn es ist (265 L. 3) $\frac{ad}{AD} = \left(\frac{cd}{CD}\right) = \frac{de}{DE} = \left(\frac{ce}{CE}\right) = \frac{ef}{EF}$, u. s. w.

Zusatz. Die Höhen ähnlicher Dreiecke abc, ABC, verhalten sich, wie ihre Grundlinien. Denn:

$$\frac{ce}{CE} = \left(\frac{ca}{CA}\right) = \frac{ab}{AB}$$

2. Die Transversale eines Dreiecks A B C, welche den Winkel B halbirt, schneidet die gegenüberliegende Seite verhältnißgleich den beiden andern, so daß AE: EC = AB: BC. Fig. 55.

Denn verlängert man AB um BD = BC und zieht CD, so ist W. A B C oder $2x = p + o = 2p$, also $x = p$ und CD par. BE; folglich AE: EC = AB: BC.

3. Drei Transversalen eines Dreiecks, wovon die eine, BE, nach der Mitte der gegenüberstehenden Seite und die beiden andern nach den Endpunkten einer Parallele derselben, FD, gezogen sind, durchschneiden einander in dem nämlichen Punkte. Fig. 56.

Denn aus der Aehnl. der Dr. MAC, MFD folgt, daß MA: MD = AC: FD. Angenommen nun, es gehe Be, welche AC halbirung soll, nicht durch M, sondern durch einen andern Punkt m, so ist mA: mD = eA: gD, oder (da Ae = Ce = ½ AC, folglich Fg = gD = ½ FD) auch mA: mD = AC: FD, welches unmöglich ist, wenn M und m nicht zusammenfallen.

Zusatz. Wenn man in einem Trapez ACDF Diagonalen zieht und ihren Durchschnittspunkt mit der Mitte der Seite AC verbindet, so sind die Linien AF, CD, EM Convergenten. Fig. 56

Fig. 56. 4. Die Transversalen eines Dreiecks, welche nach der Mitte der gegenüberliegenden Seiten gezogen werden, schneiden einander in dem nämlichen Punkte, und zwar in einer Entfernung von den Ecken, die $\frac{2}{3}$ ihrer Länge beträgt.

Denn aus der Voraussetzung $BF:BA = BD:BC = 1:2$ folgt, daß FD par. AC und deshalb auch $FD:AC = BF:BA = 1:2$ ist. Da ferner Dr. $MFD \sim MAC$, so hat man $MD:MA = FD:AC = 1:2$, also $AM = 2MD$, $AD = 3MD$ oder $AM = \frac{2}{3}AD$. Daß BE durch den Punkt M gehen müsse, folgt aus L. 3.

Fig. 57. 5. Eine auf die Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck ABC gezogene Senkrechte BD zerlegt dasselbe in zwei ihm ähnliche Dreiecke ABD und BCD.

Denn aus $o+y=R$ und $o+x=R$, $p+y=R$, folgt $x=y$ und $o=p$, also Dr. $ABD \sim BCD$, und jedes einzelne $\sim ABC$.

Fig. 57. 6. Für jedes rechtwinkliche Dreieck ist das Quadrat der Hypotenuse der Summe der Quadrate beider Catheten gleich.*)

Denn aus der Aehnlichkeit der Dr. ABC, ABD folgt

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB} \text{ oder } \overline{AB}^2 = AC \cdot AD$$

aus der Aehnlichkeit der Dr. ABC, BCD ferner:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{DC}{BC} \text{ oder } \overline{BC}^2 = AC \cdot DC$$

und durch Addition $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = AC(AD+DC) = \overline{AC}^2$.

Zusätze. I. Daraus folgt, daß $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2$.

II. Wenn man zwei rechtwinkl. Dreiecke mit einer gleichen Seite BD an einander legt, so ist $AB^2 - AD^2 = CB^2 - CD^2$ also auch $AB^2 - CB^2 = AD^2 - CD^2$ oder $(AB+BC)(AB-BC) = (AD+CD)(AD-CD)$, oder

$$\frac{AB+BC}{AD+CD} = \frac{AD-CD}{AB-BC}.$$

---

*) Unter Quadrat ist (nach 94) hier diejenige Zahl zu verstehen, welche erzeugt wird, wenn man den Zahlenwerth einer Linie mit sich selbst multiplicirt. Eben so bedeutet das Product zweier Linien in den folgenden Sätzen nichts anders, als das Product der, diese Linien messenden, Zahlenwerthe.

7. Das Quadrat einer Cathete AB ist dem Producte der Hypotenuse AC und ihres anliegenden, von der Senkrechten BD abgeschnittenen Stücks DA gleich. Fig. 57.

Denn $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB}$ oder $\overline{AB}^2 = AC \cdot AD$.

Zusatz. (S. 261 L. 4) Jede Sehne ist mittlere Proportionale zwischen dem Durchmesser und seinem anliegenden, von einer Senkrechten erzeugten, Abschnitte: AC: AB = AB: AD.

8. Das Quadrat der, auf die Hypotenuse gefällten Senkrechten BD ist dem Producte beider Hypotenusenabschnitte gleich. Fig. 57.

Denn $\frac{AD}{DB} = \frac{DB}{DC}$, oder $\overline{DB}^2 = AD \cdot DC$.

Zusatz. Wenn von einem Punkte B im Umfange eines Kreises eine Senkrechte auf den Durchmesser gefällt wird, so ist diese mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten desselben; AD: DB = DB: DC.

9. Das Quadrat einer Dreiecksseite AB, welche einem stumpfen Winkel C gegenüber steht, ist die Summe der Quadrate beider anderen Seiten nebst dem doppelten Producte aus der einen von ihnen in den Abstand CD eines, auf deren Richtung gefällten, Perpendikels BD gleich. Fig. 58.

Denn es ist (L. 6) $\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{CD}^2$, und wenn man $AD = (AC + CD)$ setzt: $\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 - 2AC.CD - \overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{CD}^2$, oder $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + 2AC \cdot CD$. Eben so kann man in Beziehung auf die Senkrechte AF den Beweis führen.

10. Das Quadrat einer Dreiecksseite CB, welche einem spitzen Winkel gegenübersteht, ist der Summe der Quadrate beider anderen Seiten weniger dem doppelten Producte aus der einen von ihnen in den Abstand AD eines, auf deren Richtung gefällten, Perpendikels BD gleich. Fig. 58.

Denn es ist (L. 6) $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{CD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AD}^2$, und da $CD = (AD - AC)$ gesetzt werden kann; $\overline{BC}^2 - \overline{AD}^2 + 2AD \cdot AC - \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AD}^2$, oder $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$

$+\overline{AC}^2 - 2AD \cdot AC$. Eben so kann man in Beziehung auf die Senkrechte den Beweis führen.

Fig. 59. 11. Die Summe der Quadrate zweier Dreiecksseiten AC, BC ist dem doppelten Quadrat einer Transversale CD, welche die dritte Seite halbirt, und den Quadraten der beiden Hälften dieser letzten gleich.

Denn $\overline{AC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 + 2AD \cdot DE$

und $\overline{BC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BD}^2 - 2BD \cdot DE$.

Also $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2$, weil $AD = BD$;

oder auch $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 2(\overline{CD}^2 + \overline{AD}^2)$.

Fig. 29. Zusatz. In jedem Parallelogramm ist die Summe der Quadratzahlen der Diagonalen derjenigen der Seiten (s) gleich.

Denn es ist $DM = MB$, also $\overline{CD}^2 + \overline{CB}^2 = 2(\overline{MD}^2 + \overline{CM}^2)$; ferner $AM = MC$, also $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{MB}^2)$, mithin durch Summirung $s = 2(\overline{AM}^2 + \overline{MD}^2 + \overline{CM}^2 + \overline{MB}^2) = 4\overline{AM}^2 + 4\overline{BM}^2 = (2AM)^2 + (2BM)^2 = AC^2 + BD^2$.

268. Lehrsätze über die Aehnlichkeit der Vielecke.

Fig. 48. 1. Aehnliche Polygone können in ähnliche Dreiecke zerlegt werden.

Denn denkt man sich beide Figuren so gelegt, daß zwei homologe Seiten parallel laufen oder in einander fallen, so fordert der Begriff der Aehnlichkeit, daß man durch alle homologe Ecken Convergenten ziehen könne, welche dann die Figuren in ähnl. Dreiecke zerfällen.

Fig. 60. 2. Aehnliche Polygone können aus ähnlichen Dreiecken zusammengesetzt werden, wenn alle homologen Seiten bei der Dreiecks-Reihen in dem nämlichen Verhältniß zu einander stehen.

Sei das Verhältniß aller homologen Seiten in beiden Dreiecksreihen $= \frac{m}{n}$ und denkt man sie auf die nämliche Weise an einander gelegt, so ist das Vieleck abcdef dem andern ABCDEF

ähnlich: denn $\frac{ab}{AB} = \frac{ac}{AC} = \frac{ad}{AD} \ldots\ldots = \frac{ag}{AG} = \frac{gf}{GF}$

$= \frac{ef}{EF}$, etc. $= \frac{m}{n}$.

3. Die Umgränzungen oder Perimeter ähnlicher Figuren verhalten sich zu einander, wie ihre homologen Seiten. Fig. 60.

Denn es ist (68 L. 11) wenn $\frac{ab}{AB} = \frac{bc}{BC} = \frac{cd}{CD}$, etc.

$= \frac{m}{n}$ auch $\frac{ab+bc+cd+\text{etc.}}{AB+BC+CD+\text{etc.}} = \frac{m}{n}$.

4. Alle regulären Polygone von gleicher Anzahl Seiten sind einander ähnlich. Fig. 61.

Denn da jedes regul. n-Eck (255 L. 3. Z.) in n gleichschenkl. Dreiecke zerfällt werden kann, deren Centriwinkel $= \frac{4R}{n}$ sind, so läßt sich eines dergestalt in ein anderes legen, daß diese W. einander decken und die Grundlinien parallel laufen. Hiernach ist die innere Figur der äußeren ähnlich und das Verhältniß der homologen Seiten beider dasjenige der Radien ihrer umschriebenen Kreise.

269. Lehrsätze über die Linien im und am Kreise.

1. Die Stücke zweier sich schneidender Sehnen sind verhältnißgleich. Fig. 62.

Denn es sind (261 L. 3) die Dreiecke ABC und DCE winkelgleich und also ähnlich; folglich AC:CB = CD:CE.

2. Die Abschnitte zwei, aus einem Punkte C gezogener, Secanten sind verhältnißgleich. Fig. 63.

Denn die Dr. CEA und CDB sind (261 L. 3) ähnlich, also CA:CB = CE:CD.

3. Die Tangente aus einem Punkte C ist mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten jeder beliebigen Secante aus C. Fig. 64.

Denn da (261 L. 7) W. CAB = ADB, so ist Dr. CAB ∽ CAD, mithin CB:AC = AC:CD.

4. Wenn man durch den Berührungspunkt zweier Kreise Secanten legt, so sind ihre Abschnitte in beiden Kreisen verhältnißgleich. Fig. 65.

Denn die an C liegenden Scheitelw. z, x und o kommen (261 L. 7) in beiden Dr. vor: alſo ſind auch die Sehnen AD und EB parallel, Dr. CAD ∽ CEB, und AC:CB=CD:CE.

Fig. 66. 5. Die Tangenten und Achſe zweier Kreiſe ſind Convergenten.

Der Beweis liegt für Fig. 66. I. in (265 L. 4 Zuſ.), da die Radien CA, ca und CB, cb parallel laufen und nach beiden Seiten verhältnißgleich ſind; für Fig. 66. II. (nach 266 L. 1) in der Winkelgleichheit der Dr. ACO, acO und BCO, bcO.

F. 66. III. 6. Wenn zwei Kreiſe einander durchſchneiden, ſo halbirt die Verbindungslinie FI der Durchſchnittspunkte die an beide Kreiſe gelegte Tangente Aa.

Denn es iſt (267 L. 3. II):

$CL^2 - cL^2 = CG^2 - cg^2 = CF^2 - cF^2$, alſo auch $CG^2 - CF^2 = cG^2 - cF^2$, oder $CG^2 - CA^2 = cG^2 - ca^2$, d. i. $GA^2 = Ga^2$ oder $GA = Ga$.

Fig. 66. I. II. 7. Wenn man durch die Mitte L des Abſtandes Pp der Berührungsſehne AB, ab zweier Kreiſe mit jenen eine Parallele GK zieht, ſo ſind die von irgend einem Punkte K derſelben an die Kreiſe gezogenen Tangenten, KH und Kh, einander gleich.

Denn es iſt (267 L. 6, 3. II)

$CL^2 - cL^2 = CG^2 - cG^2 = CK^2 - cK^2$, und da wegen AG = aG, was aus PL = pL' (265 L. 1) folgt, auch $CG^2 - cG^2 = CA^2 - ca^2$ ſein muß, ebenfalls:

$CK^2 - cK^2 = CA^2 - ca^2$, oder $CK^2 - CA^2 = cK^2 - ca^2$,

oder in veränderter Form:

$(CK + CA)(CK - CA) = (cK + ca)(cK - ca)$

d. i. $KS.KN = Ks.Kn$; und hieraus folgt $KH^2 = Kh^2$ oder KH = Kh.

Fig. 42. 8. In einem jeden, dem Kreiſe eingeſchriebenen, Vierecke ABDE iſt das Product aus den Zahlen der beiden Diagonalen der Summe derjenigen der gegenüberliegenden Seiten gleich.

Denn macht man den Bogen EK = BD, und zieht die Sehnen AK und EK, ſo ſind die Dr. ABD und AFE, weil W. o = p und x = y, einander ähnlich; folglich I. AD:BD = AE:FE oder AD.FE = BD.AE. Ferner iſt, weil W.

$x+z=y+z$ und $q=r$, das Dr. AFB ∽ AED, folglich II. $AD:DE=AB:BF$ oder $AD.BF=DE.AB$, und durch Addition von I und II: $AD(FE+BF)$ oder $AD.BE=BD.AE+DE.AB$.

270. **Aufgaben über die Lehrsätze von der Aehnlichkeit der Figuren.**

1. An einer gegebenen Seite ab, homolog der AB eine, dem Vielecke ABC ... ähnliche Figur zu construiren. Fig. 48.

Man lege ab der AB parallel, ziehe die Convergenten Aa Bb, aus dem Convergenzpunkte O die Linien OC, OD... und dann die Parallelen bc, cd... (265 L. 3).

2. Eine gerade Linie AO in n gleiche Theile zu theilen. Fig. 50.

Man ziehe aus dem einen Endpunkte O eine gerade OB in beliebiger Richtung, trage auf derselben eine willkührl. Länge, OD, n-mal ab, verbinde die Endpunkte beider Linien, A und B, und ziehe dann aus den Theilungspunkten der OB die Parallelen DP, EA, FR..., so ist (265 L. 1) AO ebenfalls in n gleiche Theile $OP=PQ=QR$... zerlegt.

3. Eine gerade Linie AB im Verhältniß der Zahlen m: n: p: q, etc. zu theilen. Fig. 51.

Man trage nach einem beliebigem Maasstabe die gegebenen Zahlen in den Stücken ad, de...gb auf einer geraden Linie ab, lege diese der gegebenen AB parallel, ziehe die Convergenten Aa, Bb, und aus C Linien durch d, e, f, ..., so wird AB (nach 267 L. 1) mit ab verhältnißgleich geschnitten.

4. Zu drei gegebenen Linien AB, AC, ab die vierte Proportionale zu finden. Fig. 53.

Man lege AB, AC unter einem beliebigen Winkel zusammen, trage auf jener ab ab, verbinde C und B, und ziehe aus b eine Parallele, so ist $AB:ab=AC:ac$ (265 L. 1).

5. Durch einen, innerhalb des Winkels ABC gezogenen Punkt c eine Linie AC zu ziehen, die durch c halbirt werde. Fig. 53.

Man ziehe cb par. CB, mache $bA=bB$, und ziehe von A durch c, so ist $Ac=cC$ (265 L. 1).

6. Zu zwei Linien AD, DC eine mittlere Proportionale zu finden. Fig. 57.

Man lege beide in gerader Linie zusammen, nehme von dieser

die Hälfte und beschreibe damit, als Radius, den Halbkreis ABC. Dann ist die Senkrechte BD, aus dem Punkt D errichtet, die mittl. Proportionale. (267 L. 8).

Fig. 57. 7. Eine Linie im Verhältniß zweier Quadratwurzeln $\sqrt{m} : \sqrt{n}$ zu theilen.

Man nehme nach beliebigem Maasstabe eine Linie $AD = m$ und lege $DC = 1$ daran, so ist $BD^2 = AD \cdot DC = m \cdot 1$ und $BD = \sqrt{m}$. Hat man nun auf die nämliche Weise $\sqrt{n}$ geometrisch bestimmt, so geschieht die Theilung der gegebenen Linie nach A. 3.

Fig. 67. 8. Eine gegebene Linie so zu theilen, daß das größere Stück mittlere Proportionale zwischen den andern und der ganze Linie sei.

Aus dem Endpunkte der AB errichte man die Senkrechte $BC = \frac{1}{2} AB$, beschreibe damit aus C einen Kreis, ziehe AC, und mache $AF = AD$, so ist AB im Punkte F so getheilt, daß $FB : AF = AF : AB$. Denn es ist (269 L. 3):

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AD} \text{ oder } \frac{AE - AB}{AB} = \frac{AB - AD}{AD}$$

und weil $AB = DE$, so wie $AD = AF$ ist,

$$\frac{AB - AF}{AD} = \frac{AE - DE}{AB}, \text{ d. i. } \frac{BF}{AD} = \frac{AD}{AB}.$$

Fig. 68. 9. In einen Kreis ein reguläres Zehneck zu beschreiben.

Man theile (nach A. 8) den Radius des Kreises so, daß das größere Stück AF mittlere Proportionale zwischen AB und BF werde, so ist es die verlangte Seite des regul. Zehnecks. Denn da der Centriwinkel eines solchen $= \frac{4R}{10} = \frac{2}{5} R$, folglich die Summe der Winkel B und G in einem Sehnen-Dreieck ABG $= 2R - \frac{2}{5} R = \frac{8}{5} R$ und jeder einzelne $= \frac{4}{5} R$, so muß W. $AGB = 2GAB$ und (267 L. 2) $AG : GB = AF : FB$, oder da (249 L. 3 u. 250, L. 7) $GB = GF = AF$, auch $AB : AF = AF : FB$ sein.

Zusätze. I. Um ein regul. Fünfeck im Kreise zu beschreiben, darf man nur die alternirenden Punkte des Zehnecks durch Sehnen verbinden.

II. Die Seite eines regul. Fünfzehnecks erhält man durch Abzu[illegible]r Centriwinkel eines Sechsecks und Zehn-

ecks, $\frac{4R}{6} - \frac{4R}{10} = \frac{4R}{15}$, in der Sehne KG dieses Winkels KAG.

10. An zwei Kreise eine gemeinschaftliche Tangente zu ziehen. Fig. 66.

Schneiden die Kreise einander nicht, so kann die Tangente sie entweder auf der nämlichen Seite der Achse oder auf verschiedenen Seiten berühren. Für beide Fälle, in I und II dargestellt, gilt indessen die nämliche Construction: man ziehe die Achse Cc, und nachdem CO:cO = CA:ca gemacht ist, aus O (263 A. 3) die Tangente OA oder OB an den einen Kreis, so berührt sie (269 L. 5) auch den andern.

Anhang.

271. Bestimmung des Umfangs regulärer Polygone und des Kreises.

1. Aus der Seite s eines regulären Vielecks im Kreise die Seite t eines regulären Vielecks um den Kreis zu bestimmen, wenn dessen Radius mit r bezeichnet wird. Fig. 45.

Man ziehe vom Mittelpunkte nach den Ecken der concentrisch und parallel gelegten ähnlichen Figuren die Convergenten Ca, Cb, Cd, Ce, und halbire den Centriwinkel ACD durch CF: dann ist $\overline{CK}^2 = \overline{CD}^2 - \overline{KD}^2 = r^2 - \frac{1}{4}s^2$, also $CK = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s^2}$ und $CK:CF = AD:ad$, oder

$$ad = \frac{CF \cdot AD}{CK} = \frac{rs}{\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s^2}}.$$

und wenn $r = 1$ gesetzt wird, $t = \frac{s}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}s^2}}$

2. Aus der Seite s eines regulären Vielecks im Kreise die Seite y eines eingeschriebenen Vielecks von doppelter Seitenzahl zu bestimmen. Fig. 45.

Man theile die Centriwinkel und verbinde die Endpunkte der Radien CF, CG, CH, CI mit den Ecken des gegebenen Vielecks, so entsteht das neue AFDG ... I von doppelter Seitenzahl: in diesem ist nun $\overline{FD}^2 = \overline{KD}^2 + \overline{FK}^2$, oder wenn man $FK = CF - CK$ setzt;

$$FD^2 = \tfrac{1}{4}s^2 + r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}s^2} + r^2 - \tfrac{1}{4}s^2$$
$$= 2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}s^2} \text{ oder } 2r\left(r - \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}s^2}\right).$$

also ist die gesuchte Seite:

$$y = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}s^2}}$$

und wenn $r = 1$ angenommen wird:

$$y = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \tfrac{1}{4}s^2}}$$

Fig. 45. 3. Aus den Seiten s und t eines regulären Vielecks im Kreise und eines ihm ähnlichen um den Kreis die Seite y eines eingeschriebenen von doppelter Seitenzahl zu bestimmen. Nach (1) ist $t = \frac{rs}{\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s^2}}$, also $\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s^2} = \frac{rs}{t}$, und nach Einführung dieses Werthes wird $y = r\sqrt{\left(2 - \frac{2s}{t}\right)}$, oder wenn $r = 1$ angenommen wird, $y = \sqrt{\left(2 - \frac{2s}{t}\right)}$.

4. Denkt man sich die Kreislinie von einer Reihe innerer und äußerer regulärer Polygone eingeschlossen, deren Seitenzahl sich fortwährend verdoppelt, so werden die Werthe von s, t, y einander stets näher kommen und endlich so unbedeutend von einander abweichen, daß der zwischen ihnen enthaltene kleine Bogen als mit ihnen von gleicher Länge betrachtet werden darf. Bedeute T den halben Umfang des umschriebenen, s den halben Umfang des eingeschriebenen Polygons und π denjenigen des Kreises, dessen Radius als die messende Einheit betrachtet werden soll, so wird T freilich um eine, wenn auch noch so geringe, Länge p größer als π, und um eine Länge q größer, als S sein: d. h.

$$T = \pi + p = S + q.$$

Fig 46. Wenn indessen die Vermehrung und damit nothwendig verbundene Verkleinerung der Polygonseiten so weit getrieben wird, daß q äußerst geringfügig erscheint, so darf man $p = q$ und folglich auch $\pi = S$ annehmen oder den Umfang des Kreises durch den des eingeschlossenen Polygons ersetzen.

Gehe man z. B. von dem regul. Sechsecke aus, dessen Seiten, weil es sich in sechs gleichseitige Dreiecke zerlegen läßt,

dem Radius 1 des Kreises gleich sind, so erhält man nach den obigen Formeln für die Seiten der inneren und äußeren regul. n–Ecke, die den Kreis einschließen, und den halben Umfang der Figuren nebst den Unterschieden beider die nachstehenden Zahlenwerthe:

$\frac{1}{2}$n	s	t	S	T	q
3	1,000000	1,154712	3,000000	3,464136	0,464136
6	0,517638	0,535890	3,105828	3,215340	0,109512
12	0,261052	0,263304	3,132628	3,159648	0,027020
24	0,130806	0,131026	3,139348	3,144624	0,005276
48	0,065438	0,065472	3,141033	3,142656	0,001623
96	0,032722	0,032726	3,141446	3,141696	0,000250

Das dem Kreise umschriebene 2.96 = 192-Eck ist also nur um 0,00025 des Radius größer, als das eingeschriebene und muß um eine noch geringere Länge p von dem Umfange des eingeschlossenen Kreises abweichen. Setzt man indessen das unbekannte p = q = 0,00025, so wird π = S = 3,141446 . ., welche Zahl allerdings noch in den letzten Decimalstellen zu klein, aber doch ein Näherungswerth für den Umfang des Kreises ist, den man ungleich genauer gefunden hätte, wenn die Rechnung fortgeführt wäre. So erhält man, nur wenige Schritte weiter gehend,

als halben Umfang des eing. 768-Ecks, S = 3,141584;
1536-Ecks, S = 3,141590;
3072-Ecks, S = 3,141592;

und diese Zahl, wenn auch unvollständig, stimmt mit dem, vollständiger berechneten Werthe von π bis auf die sechste Decimalstelle überein.

Sei nun abc . . . f der mit dem Radius Ob = 1, und ABC . . . F ein anderer, mit dem beliebigen Radius OB = r beschriebener Kreis, dessen Umfang mit P bezeichnet werden mag, so ist, wegen Aehnlichkeit und Proportionalität der Kreise: Fig. 61.

$$P : 2\pi = r : 1, \text{ oder } P = 2r\pi;$$

wonach man den Kreisumfang durch Multiplication des Durchmessers mit der Zahl π bestimmt.

Fünftes Kapitel.

Die Flächenräume.

272. Flächenmaaß. Den Flächeninhalt einer Figur durch ein gleichartiges Maaß anzugeben, wählt man am zweckmäßigsten wegen seiner einfachen und regelmäßigen Gestalt den Flächenraum eines Quadrats, welches die Einheit des Längenmaaßes für die Linien der auszumessenden Figur zur Seite hat. Zwar kann durch ein solches Quadrat wegen der mannigfachen Gestaltung der Figuren nicht eine jede unmittelbar, wie eine gerade Linie durch wiederholtes Abtragen des Maaßes gemessen werden; vielmehr scheinen nur Rechtecke einer solchen Ausmessung fähig zu sein, weil diese allein aus Quadraten sich zusammensetzen lassen. Indessen wird auch dieses schon hinreichen, wenn nur Figuren von anderer Gestalt in Rechtecke gleichen Inhalts verwandelt werden können. Ja, es bedarf nicht einmal der vorläufigen Verwandlung behuf einer wirklichen Ausmessung gegebener Figuren, wenn wir durch Vergleichung ihrer bestimmenden Stücke sie auf einander zu beziehen, und so mittelbarer Weise ihr Verhältniß zum Flächenmaaße anzugeben vermögen. Die Untersuchung über die Flächenräume der Figuren hat also zunächst eine Vergleichung zwischen denselben anzustellen, um ihre Gleichheit oder das Verhältniß des einen zum andern zu erkennen und dann daraus die Grundsätze ihrer Inhaltsbestimmung durch Zahlen abzuleiten.

273. Lehrsätze über die Gleichheit der Flächenräume.

Fig 69. 1. Parallelogramme auf gleichen Grundlinien und zwischen denselben Parallelen (von gleicher Höhe) sind inhaltsgleich.

Denn wenn beide mit der gleichen Grundlinie AB auf einander gelegt werden, so ist wegen der Parallelen AD, CB; AF, BE u. der gleichen Seiten DC+CF=EF+CF das Dr. DAF = CBE, u. folglich nach Abzug dieser gleichen Dreiecke von der ganzen Figur ABCD=ABEF.

2. Dreiecke auf gleichen Grundlinien und zwischen denselben Parallelen (von gleicher Höhe) sind inhaltsgleich. Fig. 69.

Man betrachte (nach 253 L. 4) die Dr. ABC, und ABF als Hälften der Par. ABCD u. ABEF so folgt der Beweis aus L. 1.

Zusatz. Jedes Dreieck ABC, welches mit einem Parall. ABEF gleiche Grundlinie und Höhe hat, ist halb so groß, als dasselbe.

3. Wenn durch einen beliebigen Punkt in der Diagonale eines Parallelogramms mit dessen Seiten Parallelen gezogen werden, so sind die beiden nicht durchschnittenen Stücke einander gleich. Fig. 70.

Denn da die Dr. ABC, ADC, so wie MGC, MFC, und AEM, AHM congruent sind, so entsteht durch Abziehen der kleineren Dr. von den beiden größeren EBFM = MGHD.

4. Das Quadrat einer aus zwei Stücken zusammengesetzten Linie ist den beiden Quadraten dieser Stücke und zwei aus denselben gebildeten Rechtecken gleich. Fig. 71.

Denn wenn über der gegebenen AC aus A, B, C Senkrechte errichtet und aus D und E Parallelen mit derselben gezogen werden, nachdem CD = CB, DE = AB gemacht ist, so zerfällt das Quadrat ACEG in CK + KG + AK + KE.

5. Das Quadrat des Unterschiedes zweier Linien ist den beiden Quadraten dieser Linien, weniger zwei, aus ihnen gebildeten, Rechtecken gleich. Fig. 71.

Denn wenn die Seiten BK und KD des, über AC — AB oder BC errichteten, Quadrats nach H u. F verlängert werden so ist BD = AE — HE + HF — AF.

6. Pythagoriſcher Lehrſatz. Das über der Hypotenuse eines rechtwinklichten Dreiecks conſtruirte Quadrat ist den beiden Quadraten der Catheten an Flächeninhalt gleich. Fig. 72.

Es ist nämlich AELI = ACGF, weil die Hälften beider (L. 2), die Dr. ABF u. ACE, wegen Uebereinstimmung zweier Seiten und des eingeschl. Winkels einander gleich sind. Dasselbe gilt von BDLI = ACHK wegen der congruenten Dr. BCD, BAK: folglich ist $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$.

7. Wenn man über zwei Seiten eines Dreiecks ABC beliebige Parallelogramme, conſtruirt, die Parallelen jener Fig. 73.

Seiten bis zum Durchschnittspunkte H verlängert, durch diesen und die Spitze C der Dreiecksseiten eine gerade Linie und mit ihr aus den Endpunkten der Grundlinie AB Parallelen zieht, so entsteht (indem man M und L verbindet,) ein, den beiden gegebenen, inhaltsgleiches, Parallelogramm ABML.

Denn wegen der Par. FH, AC; BC, DH; und AL, KH, BM ist AL = CH = BM, also das Viereck ABML ein Parallelogramm. Ferner ist 1) ACGF = ACHL, und ALHC = ALPK, folgl. auch ACGF = AKPL 2) BCED = BCHM und BMHC = BMPK, mithin auch BCED = BKPM. Also ist Par. ACGF + Par. BCED = Par. ABML.

Anm. Der Pythagorische Lehrsatz kann als bloße Folgerung aus diesem viel allgemeineren betrachtet werden.

274. Lehrsätze über die Verhältnisse der Flächenräume.

Fig. 74. 1. Die Flächenräume zweier Parallelogramme von gleicher Höhe verhalten sich, wie ihre Grundlinien.

Denn denkt man sich eine Seite AD in m gleiche Theile zerlegt und der Basis parallele Linien durch alle Theilungspunkte gezogen, so theilen dieselben (nach 253 L. 7) das Parall. AC in m congruente kleinere. Besteht nun AK aus n Theilen von AD, so enthält das Parall. AL auch n Theile von AC, oder es verhält sich AL:AC = n:m = AK:AD.

Wäre aber auch das Verhältniß AK:AD nicht in ganzen Zahlen auszudrücken oder irrational, so ist dennoch diese Proportion gültig. Denn angenommen, es wäre:

(1) AL:AC = AM:AD, und als Linien-Einheit würde eine Länge KP < KM gewählt, so hätte man:

(2) AO:AC = AP:AD, und ferner aus beiden:

(3) AL:AO = AM:AD, welches unmöglich ist. Da nun aus denselben Gründen nicht AL:AC = AN:AD sein kann, so folgt ganz allgemein, daß AL:AC = AK:AD.

Fig. 69. 2. Die Flächenräume zweier Dreiecke von gleicher Höhe verhalten sich, wie ihre Grundlinien.

Denn wenn (273 L. 2) Dr. ACD = ½BD u. Dr. BEF = ½AE betrachtet wird, so folgt, aus L. 1, daß ACD:BEF = BD:AE = CD:EF.

3. Die Flächenräume zweier Parallelogramme HG, MB, die gleiche Winkel haben, verhalten sich, wie die Producte zwei anliegender Seiten. Fig. 70

Denn wenn man HG und MB mit dem dritten Par. GF vergleicht, worin MG = HD und MF = EB, so ist:

$$\text{I. } \frac{GF}{MB} = \frac{GM}{ME}. \qquad \text{II. } \frac{HG}{FG} = \frac{HM}{MF}.$$

$$\text{folglich } \frac{HM.GM}{MF.ME} = \frac{HG.GF}{FG.MB} = \frac{HG}{MB}.$$

4. Die Flächenräume zweier Dreiecke, welche einen gleichen Winkel haben, verhalten sich zu einander, wie die Producte der ihn einschließenden Seiten. Fig. 75.

Denn legt man ABC und CDE mit den gleichen Winkeln in C zusammen, so daß BCD und ACE gerade Linien bilden, und zieht AD, so ist:

$$\text{I. } \frac{ABC}{ACD} = \frac{BC}{CD}. \qquad \text{II. } \frac{ACD}{DCE} = \frac{AC}{CE}.$$

$$\text{folglich } \frac{ABC}{DCE} = \frac{BC.AC}{CD.CE}.$$

5. Die Flächenräume ähnlicher Dreiecke verhalten sich, wie die Quadratzahlen ihrer homologen Seiten. Fig. 53.

Denn denkt man sich das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ in ABC gelegt, so ist ab:AB = ac:AC, also (L. 4)

$$\frac{abc}{ABC} = \frac{ab.ac}{AB.AC} = \frac{ab^2}{AB^2} = \frac{ac^2}{AC^2}.$$

6. Die Flächenräume ähnlicher Vielecke verhalten sich zu einander, wie die Quadratzahlen ihrer homologen Seiten. Fig. 48 u. 49.

Denn da ähnl. Vielecke sich in ähnl. Dreicke zerfällen lassen, so ist (L. 5)

$$\frac{Oab}{OAB} = \frac{ab^2}{AB^2}, \quad \frac{Obc}{OBC} = \frac{bc^2}{BC^2}, \quad \frac{Ocd}{OCD} = \frac{cd^2}{CD^2}$$

$$\frac{Oed}{OED} = \frac{ed^2}{ED^2},$$

und da $\frac{ab}{AB} = \frac{bc}{BC} = \frac{cd}{CD} = \frac{ed}{ED}$, durch Summirung:

$$\frac{abcde}{ABCDE} = \frac{ab^2+bc^2+cd^2+ed^2}{AB^2+BC^2+CD^2+ED^2} = \frac{ab^2}{AB^2}.$$

Fig. 61. 7. Die Flächenräume zweier Kreise verhalten sich, wie die Quadrate ihrer Radien oder Durchmesser.

Denn betrachtet man beide Kreise als Gränzen aller einzuschreibenden regulären Polygone von gleicher Seitenzahl, so kann der vorige Satz für sie nicht ungültig werden.

Fig. 61. 8. Der Flächenraum eines Kreissectors k verhält sich zu dem des ganzen Kreises K, wie sein Bogen p zu dem Umfange desselben P.

Denn denkt man sich eine beliebig kleine Sectorfläche f als gemeinsames Maaß von k und K, so wird — wenn $k = m.f$ und $K = n.f$ — auch p in m und P in n gleiche kleine Bogen zerfallen, so daß $k:K = m:n = p:P$.

275. Lehrsätze über die Inhaltsbestimmung der Figuren.

Fig. 69. 1. Den Flächeninhalt eines Rechtecks findet man durch Multiplication der Zahlen seiner Seiten.

Denn wenn man die Seite des messenden Quadrats Q mit q bezeichnet, so ist (274 L. 3) $ABCD:Q = AB.BC:q^2$, und da Q die Flächen-, q die Längeneinheit sein soll, $ABCD = AB.BC$.

Zusatz. Aus diesem Grunde läßt sich jedes Product aus zwei Factoren durch die Figur eines Rechtecks, und wenn dieselben gleich sind, durch die eines Quadrats geometrisch versinnlichen.

Fig. 69. 2. Den Flächeninhalt eines beliebigen Parallelogramms ABEF findet man durch Multiplication seiner Grundlinie und Höhe.

Denn (273 L. 1) $ABEF = ABCD = AB.BC$.

Fig. 69. 3. Der Flächeninhalt eines Dreiecks wird durch das halbe Product der Grundlinie und Höhe gegeben.

Denn da das Dr. ABC als Hälfte eines Par. ABCD angesehen werden kann, so ist sein Inhalt $= \frac{1}{2} AB.BC$.

Fig 76. 4. Der Flächeninhalt eines Trapezes wird durch das Product der Höhe in die halbe Summe der parallelen Seiten gegeben.

Denn zieht man die Diagonale AC, so ist Dreieck ABC

$= \frac{1}{2} AB.GC$, u. Dr. $ACD = \frac{1}{2} DC.GC$, also der ganze Inhalt $= GC\left(\frac{AB+DC}{2}\right)$.

5. Den Flächeninhalt eines regulären Polygons findet man durch Multiplication seines Umfangs mit dem halben Radius des eingeschriebenen Kreises. Fig. 45.

Denn da jedes regul. Vieleck F sich in soviele gleichschenkl. Dreiecke zerlegen läßt, als es Seiten hat, und auf diesen — als Tangenten betrachtet — die Radien als Höhen der Dreiecke senkrecht stehen, so ist (L. 3) $F = n.\frac{1}{2}s.r = ns.\frac{1}{2}.r$, unter n die Anzahl, unter s die Länge der Seiten verstanden.

6. Den Flächeninhalt eines Kreises K findet man durch Multiplication seines Umfangs mit der Hälfte seines Radius.

Denn denkt man um den gegebenen Kreis reguläre Polygone von so vielen und so kleinen Seiten beschrieben, daß der Umfang beider Linien bis auf einen beliebig unbedeutenden Unterschied zusammenstimmt (s. 271, 4), so darf man den vorigen Satz auch auf den eingeschlossenen Kreis als die Gränze aller zu umschreibenden Polygone übertragen. Da nun dessen Umfang $P = 2r\pi$, so ist $K = 2r\pi.\frac{1}{2}r = r^2\pi$.

7. Den Flächeninhalt eines Kreissectors k findet man durch Multiplication seines Bogens p mit der Hälfte des Radius.

Denn da (nach 274. L. 8) $k:K = p:P$ und (L. 6) $K = P.\frac{1}{2}r$, so muß auch $k = p.\frac{1}{2}r$ sein.

276. Aufgaben über die Lehrsätze von der Gleichheit und den Verhältnissen der Flächenräume.

1. Ein beliebiges Polygon A ... F in ein inhaltsgleiches Dreieck zu verwandeln. Fig. 77.

Man nimmt dem Vielecke dadurch eine Ecke nach der andern, daß man einen beliebigen ersten mit einem dritten Punkte, z. B. C mit E verbindet, aus dem zwischenliegenden die Par. DF mit CE und aus F eine Diag. FE zieht: denn da die Flächenräume $(q+r)$ und $(p+r)$ inhaltsgleich sind (273 L. 2), so muß auch das abgeschnittene Stück p dem hinzugefügten q gleich sein. Dasselbe gilt von der Ecke in B, die durch FG hinweggeschaft wird,

Fig. 61. 7. Die Flächenräume zweier Kreise verhalten sich, wi die Quadrate ihrer Radien oder Durchmesser.

Denn betrachtet man beide Kreise als Gränzen aller einzuschre benden regulären Polygone von gleicher Seitenzahl, so kann d vorige Satz für sie nicht ungültig werden.

Fig. 61. 8. Der Flächenraum eines Kreissectors k verhält sic zu dem des ganzen Kreises K, wie sein Bogen p zu dem Um fange desselben P.

Denn denkt man sich eine beliebig kleine Sectorfläche f als g meinsames Maaß von k und K, so wird — wenn $k = m.f$ und $K = n.f$ — auch p in m und P in n gleiche kleine Boge zerfallen, so daß $k:K = m:n = p:P$.

275. Lehrsätze über die Inhaltsbestimmun der Figuren.

Fig. 69. 1. Den Flächeninhalt eines Rechtecks findet man durch Multiplication der Zahlen seiner Seiten.

Denn wenn man die Seite des messenden Quadrats Q mit bezeichnet, so ist (274 L. 3) $ABCD:Q = AB.BC:q^2$, un da Q die Flächen-, q die Längeneinheit sein soll, $ABCD = AB.BC$.

Zusatz. Aus diesem Grunde läßt sich jedes Produc aus zwei Factoren durch die Figur eines Rechtecks, und wenn dieselben gleich sind, durch die eines Quadrats geome trisch versinnlichen.

Fig. 69. 2. Den Flächeninhalt eines beliebigen Parallelogramms ABEF findet man durch Multiplication seiner Grundlinie und Höhe.

Denn (273 L. 1) $ABEF = ABCD = AB.BC$.

Fig. 69. 3. Der Flächeninhalt eines Dreiecks wird durch das halbe Product der Grundlinie und Höhe gegeben.

Denn da das Dr. ABC als Hälfte eines Par. ABCD angesehen werden kann, so ist sein Inhalt $= \frac{1}{2} AB.BC$.

Fig 76. 4. Der Flächeninhalt eines Trapezes wird durch das Product der Höhe in die halbe Summe der parallelen Seiten gegeben.

Denn zieht man die Diagonale AC, so ist Dreieck ABC

$= \frac{1}{2} AB.GC$, u. Dr. $ACD = \frac{1}{2} DC.GC$, also der ganze Inhalt $= GC\left(\frac{AB+DC}{2}\right)$.

5. Den Flächeninhalt eines regulären Polygons findet man durch Multiplication seines Umfangs mit dem halben Radius des eingeschriebenen Kreises. Fig. 45.

Denn da jedes regul. Vieleck F sich in soviele gleichschenkl. Dreiecke zerlegen läßt, als es Seiten hat, und auf diesen — als Tangenten betrachtet — die Radien als Höhen der Dreiecke senkrecht stehen, so ist (L. 3) $F = n.\frac{1}{2}s.r = ns.\frac{1}{2}.r$, unter n die Anzahl, unter s die Länge der Seiten verstanden.

6. Den Flächeninhalt eines Kreises K findet man durch Multiplication seines Umfangs mit der Hälfte seines Radius.

Denn denkt man um den gegebenen Kreis reguläre Polygone von so vielen und so kleinen Seiten beschrieben, daß der Umfang beider Linien bis auf einen beliebig unbedeutenden Unterschied zusammenstimmt (s. 271, 4), so darf man den vorigen Satz auch auf den eingeschlossenen Kreis als die Gränze aller zu umschreibenden Polygone übertragen. Da nun dessen Umfang $P = 2r\pi$, so ist $K = 2r\pi.\frac{1}{2}r = r^2\pi$.

7. Den Flächeninhalt eines Kreissectors k findet man durch Multiplication seines Bogens p mit der Hälfte des Radius.

Denn da (nach 274. L. 8) $k:K = p:P$ und (L. 6) $K = P.\frac{1}{2}r$, so muß auch $k = p.\frac{1}{2}r$ sein.

276. Aufgaben über die Lehrsätze von der Gleichheit und den Verhältnissen der Flächenräume.

1. Ein beliebiges Polygon A ... F in ein inhaltsgleiches Dreieck zu verwandeln. Fig. 77.

Man nimmt dem Vielecke dadurch eine Ecke nach der andern, daß man einen beliebigen ersten mit einem dritten Punkte, z. B. C mit E verbindet, aus dem zwischenliegenden die Par. DF mit CE und aus F eine Diag. FE zieht: denn da die Flächenräume $(q+r)$ und $(p+r)$ inhaltsgleich sind (273 L. 2), so muß auch das abgeschnittene Stück p dem hinzugefügten q gleich sein. Dasselbe gilt von der Ecke in B, die durch FG hinweggeschaft wird,

und ſo fährt man fort, bis man endlich auf ein Dreieck gekommen iſt.

Fig. 78. 2. Ein Dreieck ABC in ein Rechteck zu verwandeln.

Man errichte auf beiden Endpunkten der Grundlinie Senkrechte und ziehe durch die Mitte des Höhenperpend. eine Linie EF ihr parallel. (273 L. 2).

Fig. 72. 3. Ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.

I. Nach Ergänzung des Rechtecks BILD zum Quadrate ABDE und Beſchr. eines Halbkreiſes über AB verlängere man LI bis zu demſelben u. verbinde C mit B, ſo iſt (273 L. 6) CBKH das geſuchte Quadrat.

Fig. 57. II. Man lege die Seiten des Rechtecks in gerader Linie neben einander, und beſchreibe über dieſer einen Halbkreis, ſo iſt die Senkrechte DB, aus D errichtet, mittl. Proportionale zw. AD u. DC, alſo $AD.DC = BD^2$.

Fig. 57. 4. Auf einer gegebenen Linie LN ein Parallelogramm zu conſtruiren, das einem andern EBFM inhaltsgleich ſei.

I. Man verlängere alle vier Seiten des gegebenen Rechtecks, mache MH = LN, ziehe AD par. EG, dann von A durch M nach C u. endlich CD par. AB, ſo iſt MD = MB. (273 L. 3).

II. Man ſuche zu LN, EB, EM (nach 270 L. 4) die vierte Prop. x = MG, und ſetze dieſe mit LN oder HM unter einem Winkel M = B zuſammen, ſo iſt MG . MH = BF . BE. (274 L. 3).

Fig. 72. 5. Ein Quadrat zu conſtruiren, das der Summe oder Differenz zwei gegebener Quadrate gleich ſei.

I. Man trage die Seiten der gegebenen Quadr. auf den Schenkeln eines rechten W. ab, ſo iſt die Hypotenuſe die Seite des geſuchten.

II. Man trage die Seite des kleineren Quadrats auf der einen Cathete eines rechten W. ab, und aus dem Endpunkte derſelben die Seite des größeren nach dem andern Schenkel, ſo wird auf dieſem die geſuchte Seite als Cathete abgeſchnitten.

6. Wenn zwei ähnliche Figuren gegeben ſind, eine dritte ihnen ähnliche zu bilden, die ihrer Summe oder Differenz inhaltsgleich ſei.

Man lege beide mit zwei homologen Seiten in einem rechtwinkl.

Dreieck (wie die Quadrate in A. 5) an einander, und construire (nach 270 A. 1) auf der dritten Seite desselben die ähnliche Figur. (274 L. 6).

7. Ein Quadrat zu construiren, das zu einem gegebenen sich verhalte, wie die Linien AB zu BC. Fig. 79.

Man lege AB BC an einander, beschreibe über AC einen Halbkreis, ziehe die Senkr. BD, und aus D Linien durch A und C, nehme dann DE = der Seite des gegebenen Quadrats und ziehe EH par. AC, so ist das Quadr. auf DH das gesuchte. Denn es ist $\overline{DE}^2 : \overline{DH}^2 = \overline{DA}^2 : \overline{DC}^2 = AC.AB : AC.BC = AB : BC$. (267 L. 7).

8. Eine Figur abcd, ähnlich einer andern ABCD, und an Flächeninhalt zu ihr im Verhältniß der Linien m: n stehend, zu construiren. Fig. 48.

Man suche (nach A. 7) zu einer belieb. Seite die homologe, u. construire darauf die Figur abcd (nach 270 A. 1).

9. Mehrere gegebene Kreise L, M, N ... in einen einzigen zu verwandeln.

Man setze die Durchmesser C und m von L u. M unter einem rechten W. zusammen, u. verbinde ihre Endpunkte durch die Hyp. x, so ist $l^2 + m^2 = x^2$ und x der Durchm. eines, jenen beiden gleichen, Kreises X. Eben so verfahre man dann mit X u. N u. s. f.

810. Den Durchmesser eines Kreises zu finden, der dem Unterschiede zweier gegebenen L, M, gleich sei.

Man trage auf einem Schenkel eines rechten W. den kleineren Durchm. l und aus dem Endpunkte desselben den größern m nach dem andern Schenkel ab, so ist dessen Länge der gesuchte Durchmesser.

Sechstes Kapitel.

Die ebene Trigonometrie.

277. **Gegenstand der Trig.** Da geradlinige Figuren aller Art durch Zeichnung von Diagonalen sich in **Dreiecke** zerlegen oder auch als aus solchen zusammengesetzt betrachten lassen, ihre Untersuchung also endlich auf die jener einfachsten Figur zurückgeführt werden kann, so fragt es sich, ob es nicht Mittel gebe, den Zusammenhang zwischen ihren Bestandtheilen auf dem Wege der **Rechnung**, die von der zufälligen Ausführung und dem Maaßstabe der **Construction** unabhängig, also im Allgemeinen zuverlässiger ist, mit beliebiger Genauigkeit zu bestimmen? Wenn man nun auch die Seiten des Dreiecks in beliebigem Längenmaaß und die Winkel vermöge der Kreiseintheilung in Grade, Minuten und Secunden (244) anzugeben vermag, so stellt sich doch der Vergleichung und Verbindung solcher Zahlenwerthe ihre **Ungleichartigkeit** entgegen. Dieses Hinderniß wird aber aus dem Wege geräumt sein, wenn man im Stande ist, die Winkel durch gerade Linien zu bestimmen, weil dann die sämmtlichen Zahlenwerthe, wodurch die einzelnen Bestandtheile des Dreiecks dargestellt werden können, sich auf eine und dieselbe Längeneinheit beziehen. Die Untersuchung über diese eigenthümliche Art der **Winkelbestimmung** vermöge **gerader Linien** oder vielmehr ihrer **Zahlenwerthe** ist es nun, welche der eigentlichen **Trigonometrie**, als Vorbereitung unter dem Namen der **Goniometrie** vorangeht.

Fig. 80. 278. **Goniometrische Linien.** Denkt man eine Linie von bestimmter Länge **CA** aus ihrer anfänglichen Lage durch Drehung in die neue **CE** versetzt, und von ihrem Endpunkte ein Perpendikel **ED** auf die ursprüngl. Richtung gefällt, so wird zugleich mit dem Winkel an **C** auch diese Senkrechte wachsen, die von ihr abgeschnittene Länge **CD** aber immer mehr abnehmen. Diese Abhängigkeit beider Linien von der Größe des Winkels bietet also ein einfaches Mittel für seine Bestimmung dar, indem einer jeden auch

nur ein einziger bestimmter Winkel in dem von beiden und dem Schenkel CE gebildeten rechtwinklichten Dreiecke am Punkte C entsprechen kann. Denn für jede andere Lage des Schenkels CE gegen CA entsteht ein anderes Dreieck, und alle diese Dreiecke haben nichts, als den rechten Winkel und die constante Hypotenuse gemein, während ihre spitzen Winkel und Catheten einer fortwährenden Veränderung unterworfen sind. Es ist also sehr natürlich, zur Messung der veränderlichen Catheten, vermöge derer die Winkel bestimmt werden sollen, die sich immer gleichbleibende Hypotenuse als Längeneinheit anzuwenden. Die dem W. α an C gegenüberstehende Cathete bezeichnet man mit dem Namen Sinus, die anliegende, wegen ihres Zusammenhanges mit jener, durch den Namen Cosinus. Durch Verlängerung des Schenkels CE und Errichtung einer Senkrechten aus A erhält man ein, dem kleineren ähnliches, Dreieck CAG, worin die Cathete CA zur messenden Einheit geworden ist; die andere Cathete AG nennt man, weil sie den Kreis AEF berührt, Tangente, die Hypotenuse aber, weil sie ihn schneidet, Secante des Winkels α. Endlich entsteht ein drittes ähnliches Dreieck CFK, wenn man CF auf CA und wiederum FK auf FC senkrecht zieht: in diesem ist die Cathete CF die Längeneinheit, und die Tangente FK und Secante CK des W. $\beta = ECF$ werden in Beziehung auf den W. α, welcher sein Complement ist, Cotangente und Cosecante genannt.

279. Goniometrische Functionen. Wenn die vorgenannten Linien zur Bestimmung der ihnen entsprechenden Winkel dienen sollen, so kann dieses nur von ihren, auf die messende Einheit bezogenen, Zahlenwerthen verstanden werden, und insofern darf man Sinus und Cosinus, Tangente und Cotangente, Secante und Cosecante als goniometrische Functionen des Winkels betrachten, denen die Construction im Grunde nur zur Versinnlichung dient. Sinus und Cosinus stehen nämlich als Catheten eines rechtwinkl. Dreiecks, dessen Hypotenuse $= 1$ angenommen wird, in der ergänzenden Verbindung, daß $\sin. \alpha^2 + \cos. \alpha^2 = 1$ ist, welches auch immer der W. α sein mag, und lassen sich in Folge dieser Gleichung, auch ohne Rücksicht auf alle räumliche Bedeutung, rein arithmetisch bestimmen. Von

ihnen aber sind die anderen goniom. Functionen (tang. cotg. sec. csc.) als abhängig und abgeleitet zu betrachten, nämlich.

$$\text{tang. } \alpha = \frac{\text{sin. } \alpha}{\text{cos. } \alpha}, \text{ weil } \frac{AG}{CA} = \frac{ED}{CD}.$$

$$\text{cotg. } \alpha = \frac{\text{cos. } \alpha}{\text{sin. } \alpha}, \text{ weil } \frac{FK}{CF} = \frac{CD}{ED}.$$

$$\text{sec. } \alpha = \frac{1}{\text{cos. } \alpha}, \text{ weil } \frac{CG}{CA} = \frac{CE}{CD}.$$

$$\text{csc. } \alpha = \frac{1}{\text{sin. } \alpha}, \text{ weil } \frac{CK}{CF} = \frac{CE}{ED}.$$

280. Umfang der gon. Funct. Aus der Fundamentalgleichung $\text{sin. } \alpha^2 + \text{cos. } \alpha^2 = 1$ geht hervor, daß die Werthe von Sinus und Cosinus im Allgemeinen ächte Brüche, also von o und 1 begränzt sein müssen. Für sin. $\alpha = o$ ist cos. $\alpha = 1$, und umgekehrt, überhaupt aber Vergrößerung der einen Function mit Verminderung der andern verbunden. Daraus folgt, daß die abgeleiteten Functionen tang. $\alpha = \frac{\text{sin. } \alpha}{\text{cos. } \alpha}$ und cotg. $\alpha = \frac{\text{cos. } \alpha}{\text{sin. } \alpha}$, als Quotienten veränderlicher Zähler und Nenner, die in jedem möglichen Verhältniß zu einander stehen können, jedes beliebigen, ganzen und gebrochenen Zahlenwerthes von o bis in's Unbegränzte fähig sind, — die letzten beiden aber, sec. $\alpha = \frac{1}{\text{cos. } \alpha}$ und csc. $\alpha = \frac{1}{\text{sin. } \alpha}$, ebenfalls eine unendliche Menge von Zahlenwerthen gestatten, die größer, als die Einheit, mithin ganze Zahlen oder unächte Brüche sein müssen.

Fig. 80. 281. Ausdehnung der gon. Linien. Diesen arithmetischen Umfang der goniom. Functionen kann man leicht in der Ausdehnung der gleichnamigen Linien nachweisen. Denn augenscheinlich vermindert sich mit dem W. α sein Sinus DE bis zum völligen Verschwinden und nimmt mit ihm zu, bis er endlich, wenn $\alpha = R$, zur Längeneinheit geworden ist. Umgekehrt nimmt der Cosinus CD mit der Vergrößerung des W. α bis zum Verschwinden ab und wächst zur Einheit CA an, wenn der W. selbst verschwindet.

Die Tangente AK wächst mit dem W. α hingegen bis in's Unendliche und um so schneller, je näher dieser einem rechten kommt, während die Cotangente bis zum Verschwinden abnimmt und umgekehrt. Die Secante CK endlich kann für $\alpha = o$ nur mit CA zusammenfallen und wächst in's Unendliche, wenn der W. einem rechten sich nähert; von der Cosecante gilt dasselbe umgekehrt.

282. Lage der gon. Linien. Die Beschränkung der vorstehenden Ansicht auf einen spitzen Winkel, wonach die goniom. Linien nur zur Bestimmung eines solchen dienen zu können scheinen, hebt sich durch die Betrachtung auf, daß auch stumpfe Winkel aller Art vermöge eines anliegenden rechtwinkl. Dreiecks bestimmter werden. Denn denkt Fig. 80. man sich den Schenkel AC bis B verlängert und aus dem Endpunkte N des andern Schenkels CN die Senkrechte NM auf AB gefällt, so ist diese Linie Sinus des stumpfen W. $ACN = (2R - \alpha)$, wie des spitzen Nebenwinkels $NCB = \alpha$. Diese Betrachtung läßt sich auch auf die überstumpfen Winkel $ACO = (2R + \alpha)$ und $ACU = (4R - \alpha)$ ausdehnen, deren Sinus MO und DU der Größe nach $= DE$ oder MN, aber in Ansehung ihrer Lage von ihnen verschieden sind. Aehnliches gilt von den Tangenten BH, BQ, AS in Hinsicht auf AG. Der Cosinus CM erhält die entgegengesetzte Lage im Vergleich mit demjenigen des spitzen Nebenwinkels ACE, und ist in dieser Lage Cosinus von $ACN = (2R - \alpha)$, und von $ACO = (2R + \alpha)$; in der ursprünglichen Lage erscheint wiederum der Cosinus CD des überstumpfen W. $ACU = (4R - \alpha)$. Die Cotangente erfährt denselben Wechsel der Richtungen in FL, RP und RT. Bei den Secanten und Cosecanten findet ebenfalls ein Gegensatz in den Richtungen CK, CP und CT, CL statt.

283. Bezeichnung der gon. Funct. Diese verschiedenen Lagen der goniom. Linien auszudrücken, worin sie einem spitzen, stumpfen oder überstumpfen Winkel angehören, giebt es kein einfacheres Mittel, als die Zahlenwerthe oder gon. Functionen des Sinus und Cosinus mit den Zeichen + und − zu versehen, je nachdem sie die ursprüngliche oder die entgegengesetzte Lage haben. Daraus werden sich unmittelbar die Vorzeichnungen für die abgelei-

teten Functionen der Winkel in allen vier Quadranten der ganzen Umdrehung ergeben.

Auf dieſe Weiſe findet man nämlich im erſten Quadranten ACF:

$$\text{I.}\quad \begin{cases} DE = +\sin.\,\alpha & CD = +\cos.\,\alpha \\ AG = +\operatorname{tang}.\,\alpha = \dfrac{+\sin.\,\alpha}{+\cos.\,\alpha} & KF = +\cot.\,\alpha = \dfrac{+\cos.\,\alpha}{+\sin.\,\alpha} \\ CG = +\sec.\,\alpha = \dfrac{1}{+\cos.\,\alpha} & CK = +\operatorname{csc}.\,\alpha = \dfrac{1}{+\sin.\,\alpha} \end{cases}$$

Im zweiten Quadranten FCB:

$$\text{II.}\quad \begin{cases} MN = +\sin.\,\alpha & CM = -\cos.\,\alpha \\ BH = -\operatorname{tg}.\,\alpha = \dfrac{+\sin.\,\alpha}{-\cos.\,\alpha} & FL = -\cot.\,\alpha = \dfrac{-\cos.\,\alpha}{+\sin.\,\alpha} \\ CH = -\sec.\,\alpha = \dfrac{1}{-\cos\alpha} & CL = +\operatorname{csc}.\,\alpha = \dfrac{1}{+\sin.\,\alpha} \end{cases}$$

Im dritten Quadranten BCR:

$$\text{III.}\quad \begin{cases} MO = -\sin.\,\alpha & CM = -\cos.\,\alpha \\ BQ = +\operatorname{tg}.\,\alpha = \dfrac{-\sin.\,\alpha}{-\cos.\,\alpha} & RP = +\cot.\,\alpha = \dfrac{-\cos.\,\alpha}{-\sin.\,\alpha} \\ CQ = -\sec.\,\alpha = \dfrac{1}{-\cos.\,\alpha} & CP = -\operatorname{csc}.\,\alpha = \dfrac{1}{-\sin.\,\alpha} \end{cases}$$

Im vierten Quadranten RCA:

$$\text{IV.}\quad \begin{cases} DU = -\sin.\,\alpha & CD = +\cos.\,\alpha \\ AS = -\operatorname{tg}.\,\alpha = \dfrac{-\sin.\,\alpha}{+\cos.\,\alpha} & RT = -\cot.\,\alpha = \dfrac{+\cos.\,\alpha}{-\sin.\,\alpha} \\ CS = +\sec.\,\alpha = \dfrac{1}{+\cos.\,\alpha} & CT = -\operatorname{csc}.\,\alpha = \dfrac{1}{-\sin.\,\alpha} \end{cases}$$

284. Reduction der gon. Funct. Der Zuſammenhang, worin ſtumpfe Winkel aller Art mit einem ſpitzen ſtehen, der als Ergänzung oder Ueberſchuß derſelben von R, 2R, 3R oder 4R angeſehen werden kann, macht es möglich, ihre Functionen auf die eines ſolchen Winkels zu reduciren und dadurch einfacher auszudrücken. So ergeben ſich aus den vorſtehenden Betrachtungen über die Lage der gon om. Linien und die Bezeichnung ihrer arithmetiſchen Werthe, wenn man unter α und β Complementwinkel ver-

steht, oder $\alpha+\beta=R$ setzt, mit Hinblick auf die Figur fol- Fig. 80.
gende vereinfachende Beziehungen unter den Functionen ergänzender Winkel:

Für die Lage CE des drehenden Schenkels im ersten Quadranten oder dem W. ECF:

$$\text{I.}\quad\begin{cases}\sin.(R-\alpha)=\sin.\beta=+\cos.\alpha;\\ \cos.(R-\alpha)=\cos.\beta=+\sin.\alpha.\\ \text{tg.}(R-\alpha)=\text{tg.}\beta=+\cot.\alpha;\\ \cot.(R-\alpha)=\cot.\beta=+\text{tg.}\alpha.\\ \sec.(R-\alpha)=\sec.\beta=+\operatorname{csc}.\beta;\\ \operatorname{csc}.(R-\alpha)=\operatorname{csc}.\beta=+\sec.\alpha.\end{cases}$$

Für die Lage CN im zweiten Quadranten oder dem Winkel ACN:

$$\text{II.}\quad\begin{cases}\sin.(2R-\alpha)=\sin.(R+\beta)=+\sin.\alpha;\\ \cos.(2R-\alpha)=\cos.(R+\beta)=-\cos.\alpha.\\ \text{tg.}(2R-\alpha)=\text{tg.}(R+\beta)=-\text{tg.}\alpha;\\ \cot.(2R-\alpha)=\cot.(R+\beta)=-\cot.\alpha.\\ \sec.(2R-\alpha)=\sec.(R+\beta)=+\sec.\alpha;\\ \operatorname{csc}.(2R-\alpha)=\operatorname{csc}.(R+\beta)=-\operatorname{csc}.\alpha.\end{cases}$$

Für die Lage CO im dritten Quadranten oder den Winkel ACO:

$$\text{III.}\quad\begin{cases}\sin.(3R-\beta)=\sin.(2R+\alpha)=-\sin.\alpha;\\ \cos.(3R-\beta)=\cos.(2R+\alpha)=-\cos.\alpha.\\ \text{tg.}(3R-\beta)=\text{tg.}(2R+\alpha)=+\text{tg.}\alpha;\\ \cot.(3R-\beta)=\cot.(2R+\alpha)=+\cot.\alpha.\\ \sec.(3R-\beta)=\sec.(2R+\alpha)=-\sec.\alpha;\\ \operatorname{csc}.(3R-\beta)=\operatorname{csc}.(2R+\alpha)=-\operatorname{csc}.\alpha.\end{cases}$$

Für die Lage CU im vierten Quadranten oder den Winkel ACU:

$$\text{IV.}\quad\begin{cases}\sin.(4R-\alpha)=\sin.(3R+\beta)=-\sin.\alpha;\\ \cos.(4R-\alpha)=\cos.(3R+\beta)=+\cos.\alpha.\\ \text{tg.}(4R-\alpha)=\text{tg.}(3R+\beta)=-\text{tg.}\alpha;\\ \cot.(4R-\alpha)=\cot.(3R+\beta)=-\cot.\alpha.\\ \sec.(4R-\alpha)=\sec.(3R+\beta)=+\sec.\alpha;\\ \operatorname{csc}.(4R-\alpha)=\operatorname{csc}.(3R+\beta)=-\operatorname{csc}.\alpha.\end{cases}$$

Denkt man sich den Winkel ACU durch Drehung des rotirenden Schenkels in entgegengesetzter Richtung beschrieben, so ist er durch $-\alpha$ zu bezeichnen, und demzufolge:

$$\sin.(-\alpha) = -\sin.\alpha \qquad \cos.(-\alpha) = +\cos.\alpha$$
$$\text{tg.}(-\alpha) = -\text{tg.}\alpha \qquad \cot.(-\alpha) = -\cot.\alpha$$
$$\sec.(-\alpha) = +\sec.\alpha \qquad \operatorname{cosec.}(-\alpha) = -\operatorname{cosec.}\alpha$$

285. Multiplication der gon. Functionen. Da alle goniometr. Functionen sich auf die Einheit beziehen und folglich gebrochene oder ganze unbenannte Zahlen sind, welche angeben, wievielmal die Längeneinheit in der Länge des Sinus, der Tangente etc. enthalten sei, so muß eine jede Function in dem besondern Falle, wo man sie auf eine, von jener Einheit verschiedene, Zahl oder Länge bezieht, ausdrücklich durch dieselbe multiplicirt werden. So ist im Dreiecke ABC.

Fig. 81.

$$AB = BC.\sin.\gamma = AC.\text{tang.}\gamma.$$
$$AC = BC.\cos.\gamma = AB.\cot.\gamma.$$
$$BC = AC.\sec.\gamma = AB.\operatorname{cosec}\gamma.$$

Denn angenommen, die messende Längeneinheit, in deren Theilen die goniom. Linien ausgedrückt sind, sei keine Seite des Dr. ABC, sondern davon verschieden, etwa $= CE$ oder CD, so folgen die vorstehenden Producte aus der Aehnlichkeit der Dreiecke und den daraus sich ergebenden Verhältnissen:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{ED}{EC} = \frac{\sin.\gamma}{1}; \quad \frac{AB}{AC} = \frac{ED}{DC} = \frac{\text{tg.}\gamma}{1};$$
$$\frac{AC}{BC} = \frac{DC}{EC} = \frac{\cos.\gamma}{1}; \quad \frac{AC}{AB} = \frac{DC}{DE} = \frac{\cot.\gamma}{1};$$
$$\frac{BC}{AC} = \frac{EC}{DC} = \frac{\sec.\gamma}{1}; \quad \frac{BC}{AB} = \frac{EC}{DE} = \frac{\operatorname{cosec.}\gamma}{1}.$$

Fig. 82. 286. Funct. zweitheil. Winkel. Denkt man sich den W. $ACF = \alpha$ um eine bestimmte Größe $FCE = \gamma = FCK$ wachsend oder abnehmend, so ändern sich zugleich seine gon. Functionen und es ergeben sich namentlich für Sinus und Cosinus zweitheiliger Winkel der Form $(\alpha+\gamma)$ und $(\alpha-\gamma)$ wichtige Grundformeln, aus denen wiederum

eine große Menge anderer, die für trigonom. Betrachtungen unentbehrlich sind, abgeleitet werden können.

Man ziehe nämlich, senkrecht auf FC die Linie EH = sin. γ, auf AC die Linien ED = sin. $(\alpha+\gamma)$, KL = sin. $(\alpha-\gamma)$, HI, und aus H u. K die Senkr. HO, KR, so ist W. HEP = PCD = α, und folglich:

I. ED = DO + OE = HI + OE = HC. sin. α + HE. cos. α
d. i. sin. $(\alpha+\gamma)$ = sin. α cos. γ + sin. γ cos. α . . . . (1)

II. DC = CI − DI = CI − HO = HC. cos. α − HE. sin. α
d. i. cos. $(\alpha+\gamma)$ = cos. α cos. γ − sin. α sin. γ . . . . (2)

III. KL = HI − HR = HI − OE = HC. sin. α − HE. cos. α
d. i. sin. $(\alpha-\gamma)$ = sin. α cos. γ − sin. γ. cos. α . . . . . (3)

IV. CL = CI + IL = CI + HO = HC. cos. α + HE. sin. α
d. i. cos. $(\alpha-\gamma)$ = cos. α cos. γ + sin. α. sin. γ . . . . . (4)

Anmerkung. Die Allgemeinheit dieser Fundamentalformeln in ihrer Ausdehnung auf stumpfe und überstumpfe Winkel zu beweisen, darf man nur allmählig:

sin. α = sin. $(R+\alpha)$, = sin. $(2R+\alpha)$, = sin. $(3R+\alpha)$
d. i. (nach 284) = + cos. α , = − sin. α , = − cos. α
cos. α = cos. $(R+\alpha)$, = cos. $(2R+\alpha)$, = cos. $(3R+\alpha)$
d. i. (nach 284) = − sin. α , = − cos. α , = + sin. α

setzen, woraus die nämlichen Resultate hervorgehen.

287. Goniometrische Formeln. Durch Anwendung der arithmet. Grundoperationen, einiger Umformungen und Substitutionen, lassen eine Menge von Formeln aus den vier vorstehenden sich entwickeln; nämlich:

I. Durch Addition und Subtraction.

aus (1) u. (2) sin. $(\alpha+\gamma)$ + sin. $(\alpha-\gamma)$ = 2 sin. α. cos. γ. (5)
sin. $(\alpha+\gamma)$ − sin. $(\alpha-\gamma)$ = 2 sin. γ. cos. α. (6)
aus (3) u. (4) cos. $(\alpha+\gamma)$ + cos. $(\alpha-\gamma)$ = 2 cos. α. cos. γ. (7)
cos. $(\alpha-\gamma)$ − cos $(\alpha+\gamma)$ = 2 sin. α. sin. γ. (8)

II. Durch Multiplication:

aus (1) u. (2) sin. $(\alpha+\gamma)$ sin. $(\alpha-\gamma)$ = sin. α^2 − sin. γ^2 (9)
aus (3) u. (4) cos. $(\alpha+\gamma)$ cos. $(\alpha-\gamma)$ = cos. α^2 − sin. γ^2 (10)
aus (1) u. (4) sin. $(\alpha+\gamma)$ cos. $(\alpha-\gamma)$ = sin. α. cos. α
+ sin. γ. cos. γ. . (11)
aus (2) u. (3) cos. $(\alpha+\gamma)$ sin. $(\alpha-\gamma)$ = sin. α. cos. α
− sin. γ. cos. γ. . (12)

III. Durch Division:

aus (1) u. (3) $\text{tang.}(\alpha+\gamma) = \frac{\text{tang.}\,\alpha + \text{tang.}\,\gamma}{1 - \text{tg.}\,\alpha.\ \text{tg.}\,\gamma}$ . . . . (13)

aus (2) u. (4) $\text{tang.}(\alpha-\gamma) = \frac{\text{tang.}\,\alpha - \text{tang.}\,\gamma}{1 + \text{tg.}\,\alpha\ \text{tg.}\,\gamma}$ . . . . (14)

aus (1) u. (3) $\text{cot.}\,(\alpha+\gamma) = \frac{\text{cot.}\,\alpha.\ \text{cot.}\,\gamma - 1}{\text{cot.}\,\alpha + \text{cot.}\,\gamma.}$ . . . (15)

aus (2) u. (4) $\text{cot.}\,(\alpha-\gamma) = \frac{\text{cot.}\,\alpha.\ \text{cot.}\,\gamma + 1}{\text{cot.}\,\alpha - \text{cot.}\,\gamma.}$ . . . . (16)

IV. Durch die Substitution $\gamma = \alpha$ ergiebt sich kürzer:

aus (1) $\sin 2\alpha = 2\ \text{sin.}\,\alpha.\ \text{cos.}\,\alpha$ . . . . . (17)

aus (3) $\text{cos.}\,2\alpha = \text{cos.}\,\alpha^2 - \text{siu.}\,\alpha^2 = \left\{\begin{matrix} 2\,\text{cos.}\,\alpha^2 - 1 \\ 1 - 2\,\text{sin.}\,\alpha^2 \end{matrix}\right\}$ (18)

in etwas veränderter Form:

$$\text{cos.}\,\alpha = \sqrt{\left(\frac{1+\text{cos.}\,2\alpha}{2}\right)};\quad \text{sin.}\,\alpha = \sqrt{\left(\frac{1-\text{cos.}\,2\alpha}{2}\right)}$$

aus (13) $\text{tang.}\,2\alpha = \frac{2\ \text{tang.}\,\alpha}{1 - \text{tg.}\,\alpha^2}$ . . . . . (19)

aus (15) $\text{cotg.}\,2\alpha = \frac{\text{cot.}\,\alpha^2 - 1}{2\ \text{cot.}\,\alpha.}$ . . . . . (20)

V. Durch Einführung der Formeln (17) und (18), wobei, wenn $\alpha > \gamma$ angenommen wird, $\text{cos.}\,\gamma > \text{cos.}\,\alpha$ sein muß:

in (9) $2\,\text{sin.}\,(\alpha+\gamma).\ \text{sin.}\,(\alpha-\gamma) = \text{cos.}\,2\gamma - \text{cos.}\,2\alpha$ (21)

in (10) $2\,\text{cos.}\,(\alpha+\gamma).\ \text{cos.}\,(\alpha-\gamma) = \text{cos.}\,2\alpha + \text{cos.}\,2\gamma$ (22)

in (11) $2\,\text{sin.}\,(\alpha+\gamma).\ \text{cos.}\,(\alpha-\gamma) = \text{sin.}\,2\alpha + \text{sin.}\,2\gamma$ (23)

in (12) $2\,\text{cos.}\,(\alpha+\gamma).\ \text{sin.}\,(\alpha-\gamma) = \text{sin.}\,2\alpha - \text{sin.}\,2\gamma$ (24)

VI. Durch Division dieser Formeln entstehen ferner:

$$\left.\begin{matrix} \text{aus (21) u. (24)}\ \text{tang.}\,(\alpha+\gamma) = \frac{\text{cos.}\,2\gamma - \text{cos.}\,2\alpha}{\text{sin.}\,2\alpha - \text{sin.}\,2\gamma} \\ \text{aus (21) u. (23)}\ \text{tang.}\,(\alpha-\gamma) = \frac{\text{cos.}\,2\gamma - \text{cos.}\,2\alpha}{\text{sin.}\,2\alpha + \text{sin.}\,2\gamma} \end{matrix}\right\} \quad (25)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{aus (22) u. (23)} & \cot.(\alpha+\gamma) = \dfrac{\cos.2\gamma+\cos.2\alpha}{\sin.2\alpha+\sin.2\gamma} \\ \text{aus (22) u. (24)} & \cot.(\alpha-\gamma) = \dfrac{\cos.2\gamma+\cos.2\alpha}{\sin.2\alpha-\sin.2\gamma} \end{array}\right\} \quad (26)$$

$$\text{aus (23) u. (24)} \quad \frac{\sin.2\alpha+\sin.2\gamma}{\sin.2\alpha-\sin.2\gamma} = \frac{\tang.(\alpha+\gamma)}{\tang.(\alpha-\gamma)} \quad (27)$$

$$\text{aus (21) u. 22)} \quad \frac{\cos.2\gamma-\cos.2\alpha}{\cos.2\gamma+\cos.2\alpha} = \operatorname{tg}(\alpha+\gamma).\operatorname{tg}(\alpha-\gamma) \quad (28)$$

VII. Ferner geben unmittelbar die Definitionen $\tang.\alpha = \frac{\sin.\alpha}{\cos.\alpha}$ und $\cot.\alpha = \frac{\cos.\alpha}{\sin.\alpha}$ die Gleichungen:

$$\tang.\alpha+\tang.\gamma = \frac{\sin.(\alpha+\gamma)}{\cos.\alpha.\cos.\gamma} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

$$\tang.\alpha-\tang.\gamma = \frac{\sin.(\alpha-\gamma)}{\cos.\alpha.\cos.\gamma} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

$$\cot.\gamma+\cot.\alpha = \frac{\sin.(\alpha+\gamma)}{\sin.\alpha.\sin.\gamma} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

$$\cot.\gamma-\cot.\alpha = \frac{\sin.(\alpha-\gamma)}{\sin.\alpha.\sin.\gamma} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

VIII. Durch Multiplication oder Division entstehen endlich noch:

$$\text{aus (29) u. (30)} \quad \tg.\alpha^2-\tg.\gamma^2 = \frac{\sin.(\alpha+\gamma)\sin.(\alpha-\gamma)}{\cos.\alpha^2.\cos.\gamma^2} \quad (33)$$

$$\frac{\tg.\alpha+\tg.\gamma}{\tg.\alpha-\tg.\gamma} = \frac{\sin.(\alpha+\gamma)}{\sin.(\alpha-\gamma)} \quad \ldots\ldots \quad (34)$$

$$\text{aus (31) u. (32)} \quad \cot.\gamma^2-\cot.\alpha^2 = \frac{\sin.(\alpha+\gamma)\sin.(\alpha-\gamma)}{\sin.\alpha^2.\sin.\gamma^2} \quad (35)$$

$$\frac{\cot.\gamma+\cot.\alpha}{\cot.\alpha} = \frac{\sin.(\alpha+\gamma)}{\sin.(\alpha-\gamma)} \quad \ldots\ldots \quad (36).$$

288. Berechnung der gon. Functionen. Die vorstehenden Formeln, vermöge deren man aus den Functionen zweier Winkel α und γ Functionen ihrer Summen oder Differenz, oder auch aus denen eines beliebigen W. α andere des doppelten oder halben Winkels berechnen kann, erfordern für den Entwurf einer Tabelle goniometrischer Func-

ctionen nur die unmittelbare Angabe einiger von ihnen für bestimmte Winkel, weil daraus eine unendliche Menge anderer nach und nach abgeleitet werden können. Diejenigen Winkel, wofür die Zahlenwerthe der Sinus als halbe Sehnen ($\frac{1}{2}x$) der doppelten Winkel ohne Weiteres hervorgehen, sind die W. von 30°, 45° und 18°.

Es ist nämlich (263 Aufg. 9) $\frac{1}{2}x$ als sin. $30° = \frac{1}{2}$, folglich cos. $30° = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, oder:

sin. 30° = cos. 60° = 0,50000 tg. 30° = cot. 60° = 0,57735
cos. 30° = sin. 60° = 0,86602 cot. 30° = tg. 60° = 1,73205

Ferner findet man (263. A. 8) $\frac{1}{2}x$ als Sin. $45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, also

sin. 45° = cos. 45° = 0,7010 tg. 45° = cot. 45° = 1,00000

Für die Sehne des W. von 36° ergiebt sich (270, A. 9), aus der Gleichung $\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$ oder $x^2+x=1$ der Zahlenwerth $x = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$. Also ist $\frac{1}{2}x$ als sin. $18° = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$ und daraus:

sin. 18° = cos. 72° = 0,30901 tg. 18° = cot. 72° = 0,32491
cos. 18° = sin. 72° = 0,95105 cot. 18° = tg. 72° = 3,07768

Setzt man nun in (1) (2) (5) (6) $\alpha = 45°$, $\gamma = 30°$, so wird

sin. 75° = cos. 15° = 0,96592 tg 75° = cot. 15° = 3,73205
cos. 75° = sin. 15° = 0,25881 cot. 75° = tg. 15° = 0,26794

Eben so giebt die Substitution $\alpha = 30°$, $\gamma = 18°$:

sin. 48° = cos. 42° = 0,74314 tg. 48° = cot. 42° = 1,11061
cos. 48° = sin. 42° = 0,66913 cot. 48° = tg. 42° = 0,90040

und man kann auf diesem Wege, indem man die gefundenen Functionen neuer Winkel benutzt, immer andere ableiten. Durch Anwendung der Formeln (17)... 20) findet man ferner neue Funct. für die Hälfte oder das Doppelte der gegebenen Winkel. Sei z. B. $\alpha = 48°$, so ist cos. $24° = \sqrt{\left(\frac{1+0,66913}{2}\right)}$ und sin. $24° = \sqrt{\left(\frac{1-0,66913}{2}\right)}$

oder:

sin 24° = cos. 66° = 0,40673 tg. 24° = cot. 66° = 0,44522
cos. 24° = sin. 66° = 0,91354 cot. 24° = tg. 66° = 2,24603

Oder man setze $\alpha = 42°$, so ist $\sin. 84° = 2. \sin. 42°. \cos. 42°$, also:

$\sin. 84° = \cos. 6° = 0{,}99452$ $\quad$ $\text{tg}. 84° = \cot. 6° = 9{,}51436$
$\cos. 84° = \sin. 6° = 0{,}10452$ $\quad$ $\cot. 84° = \text{tg}. 6° = 0{,}10510$

Diese Beispiele der Berechnung mögen hinreichen, zu zeigen, wie man mit Hülfe der goniom. Formeln die Functionen einzelner Winkel zu finden und dadurch eine Tabelle derselben zu construiren allenfalls im Stande wäre, wenn nicht die Analysis durch Ausdrücke für Sinus und Cosinus, welche die Form unendlicher Reihen haben, (s. §. 193) ein leichteres und vollständigeres Rechnungs-Verfahren darböte.

289. Goniometrische Tafeln. Soll der Grundbegriff der Goniometrie — Bestimmung der Winkel vermöge gerader Linien — zur Anwendung kommen, so müssen die Zahlenwerthe dieser Linien, für sämmtliche Winkel (nach einer gewissen Stufenfolge, berechnet und auf eine übersichtliche Weise geordnet oder in Tafeln zusammengestellt werden, die es möglich machen, zu jedem gegebenen Winkel die zugehörigen Functionen, oder umgekehrt zu jeder Function den zugehörigen Winkel anzugeben. Da nun jene Zahlenwerthe im Allgemeinen irrational und deshalb nur in unvollständigen Decimalbrüchen auszudrücken sind, so hängt die Genauigkeit der Tafeln von der Menge der Decimalstellen ab, wie ihre Vollständigkeit von der Menge der überhaupt angegebenen Winkel. In größeren Tafeln schreiten diese in einzelnen Minuten oder gar Secunden fort, in kleineren von 10 zu 10 Minuten; in jenen sind ihre Functionen bis auf 7 oder 10, in den kleineren bis auf 5, 6 oder höchstens 7 Decimalstellen angegeben. Alle erstrecken sich aber nur von 0° bis 45°, weil die Functionen größerer, spitzer oder stumpfer Winkel (nach 284) auf die, in jene Gränzen eingeschlossenen zu reduciren, oder ihre Zahlenwerthe unter denselben bereits vorhanden sind. So ist z. B. $\cos. 71° = \sin. 19°$, $\text{tg}. 64° = \cot. 26°$, $\sin. 124° = \sin. (R + 34°) = \cos. 34°$, $\text{tg}. 210° = \text{tg}. (2R + 30) = \text{tang}. 30°$. Die verschiedenen Bedeutungen des nämlichen Zahlenwerths für Functionen der ergänzenden Winke α und β, wenn $\alpha + \beta = 90°$, sind in den Tafeln durch Ueber- und Unterschriften der correspondirenden Functio-

nen sinus und cosinus, tangens und cotangens bemerkt. Zu den obenstehenden Benennungen gehört die absteigende, zu den untenstehenden die aufsteigende Reihe der Winkel zur Rechten.

Die Unbequemlichkeit, mit den, in irrationalen Brüchen ausgedrückten, goniometrischen Functionen, Berechnungen der Multiplication oder Division, Potenzirung und Wurzelausziehung auszuführen, wie die Gestalt der Formeln, zu welchen trigon. Untersuchungen führen, solche häufig genug fordert, hat den Entwurf *solcher* goniometrischer Tafeln veranlaßt, in denen nicht die Functionen selbst, sondern vielmehr ihre *Logarithmen* enthalten sind. Da nun aber *jene* größtentheils *ächte Brüche* und nur die Tangenten von 45° bis 90° oder Cotangenten von 45° bis 0° größer als die Einheit, also die Logarithmen der trigonom. Functionen (nach 131) zum größten Theil *negative* Zahlen sind, so hat man der Gleichförmigkeit und Bequemlichkeit wegen alle Logarithmen um 10 zu groß angesetzt und muß deshalb bei jedem — 10 hinzugefügt denken. So ist z. B. log. sin. 30° = log. $(\frac{1}{2})$ = — 0,3010300 oder nach Angabe der Tafeln die dekadische Ergänzung 9,6989700, weil (10—0,3010300)—10 mit jenem negativen Logarithmus identisch ist. Die Zugabe von Proportionaltheilen für einzelne Minuten oder Secunden und der Gebrauch derselben erklärt sich, (nach 130) von selbst.

---

290. *Anwendung der Goniometrie.* Sollen nunmehr die Begriffe und Lehrsätze der Goniometrie auf *Figuren* angewendet werden, so kann dieß nur in der Absicht geschehen, aus gegebenen Bestandtheilen derselben andere unbekannte durch *Rechnung* zu bestimmen. Die Anzahl der bestimmenden Stücke, welche zur Ausmittelung eines abhängigen erforderlich sind, hängt begreiflich von der *Art* der Figur ab, und ist die geringste für das Dreieck, den eigentlichen Gegenstand der Trigonometrie. Bezeichnet
Fig. 81. man die, den Ecken A, B, C desselben gegenüberliegenden, Seiten durch a, b, c, und die Winkel durch α, β, γ, so reicht es (nach 249) zu seiner Bestimmung hin, daß von

jenen sechs Bestandtheilen drei, von einander unabhängige gegeben seien, um jedes der drei übrigen (abhängigen) Stücke zu finden, den einzigen Fall ausgenommen, wo zwei Seiten nebst einem nicht eingeschlossenen Winkel gegeben sind, weil daraus zwei verschiedene Dreiecke folgen können, sofern der Winkel ein spitzer und die gegenüberliegende Seite kleiner als die anliegende, aber nicht ausdrücklich bemerkt ist, ob die Senkrechte aus der Spitze auf die dritte Seite inner- oder außerhalb liegen soll. Denken wir uns aber diese Bemerkung der Angaben des besondern Falles noch hinzugefügt, so darf überhaupt ein Dreieck als völlig bestimmt angesehen werden, wenn drei von einander unabhängige Stücke desselben gegeben sind, unter denen (nach 250 L. 8) höchstens zwei Winkel sein dürfen, also wenigstens eine Seite enthalten sein muß. Die Trigonometrie wird also die abhängige Größe, welche gefunden werden soll, mit den Werthen der drei gegebenen in eine Gleichung verknüpfen und arithmetisch durch deren Auflösung bestimmen müssen.

291. Trigon. Lehrsätze für rechtwinkl. Dreiecke. Unter den Dreiecken gestattet das rechtwinklige die einfachste Anwendung der Goniometrie, indem es die goniom. Linien geradezu darstellt, also unmittelbar deren Zahlenwerthe auf seine Seiten anzuwenden erlaubt, sofern man nur die Werthe derjenigen Seite, worauf die anderen bezogen werden sollen, als Factor hinzugefügt (S. 285). Folgende Gleichungen, welche alle Fälle gegenseitiger Bestimmung in sich schließen und auch als Lehrsätze ausgesprochen werden können, enthalten nur zwei bestimmende Größen des Dreiecks; weil der rechte Winkel bei allen als die dritte vorausgesetzt wird. Fig. 81.

(1) $c = a \cdot \sin \gamma$ (2) $b = a \cdot \cos \gamma$

(3) $a = \frac{c}{\sin \gamma}$ (4) $a = \frac{b}{\cos \gamma}$

(5) $b = c \cdot \operatorname{tang} \gamma$ (6) $c = b \cdot \cot \gamma$

(7) $a = \sqrt{b^2 + c^2}$

(8) $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{(a + c)(a - c)}$

(9) $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a + b)(a - b)}$.

293. Allg. trig. Lehrsätze über die Transversalen im Dreieck.

Fig. 85. Die aus den Spitzen eines Dreiecks ABC gezogenen Transversalen AD, BE, CF mögen mit d, e, f, die ihnen zur Rechten liegenden oder primären Winkel mit α', β', γ', die secundären oder zur Linken liegenden mit $\alpha'', \beta'', \gamma''$ und eben so die, diesen Winkeln gegenüberliegenden primären oder secundären Seitenabschnitte mit a', b', c' oder a'', b'', c'' bezeichnet werden. Die Seiten des, von den Transversalen im Innern des gegebenen gebildeten, Dreiecks GKL deute man ferner durch g, k, l, und die übrigen Stücke derselben durch d', e', f; d'', e'', f'' an; so ist nach dieser Bezeichnung:

$$a = a' + a''; \quad b = b' + b''; \quad c = c' + c'';$$
$$\alpha = \alpha' + \alpha''; \quad \beta = \beta' + \beta''; \quad \gamma = \gamma' + \gamma'';$$
$$d = d' + k + d''; \quad e = e' + l + e''; \quad f = f' + g + f''.$$

Fig. 85. 1. Die Producte der primären und der secundären Seitenabschnitte im Dreieck verhalten sich zu einander, wie die Producte der Sinus ihrer gegenüberliegenden Winkel.

Denn es folgt aus 292 L. 3, daß:

$$a' : d = \sin.\alpha' : \sin.\beta$$
$$d : a'' = \sin.\gamma : \sin.\alpha''$$
$$b' : e = \sin.\beta' : \sin.\gamma$$
$$e : b'' = \sin.\alpha : \sin.\beta''$$
$$c' : f = \sin.\gamma' : \sin.\alpha$$
$$f : c'' = \sin.\beta : \sin.\gamma''$$

Also $a'.b'.c' : a''.b''.c'' = \sin.(\alpha', \beta', \gamma') : \sin.(\alpha'', \beta'', \gamma'')$

wenn man durch diese Abkürzung die Producte der drei Sinus andeuten will.

Fig. 85. 2. Die Producte aus den primären Abschnitten der Transversalen und den um die Seiten des inneren Dreiecks verlängerten verhalten sich, wie die Producte der Sinus der primären und der secundären Winkel.

Denn nach 292 L. 3 ist

$$d' : f' + g = \sin.\gamma' : \sin.\alpha''$$
$$e' : d' + k = \sin.\alpha' : \sin.\beta''$$
$$f' : e' + b = \sin.\beta' : \sin.\gamma''$$

Also $d'e'f' : (d'+k)(e'+b)(f'+g) = \sin.(\alpha', \beta', \gamma') : \sin.(\alpha'', \beta'', \gamma'')$

Zusatz. Die Prod. aus den primären und secundären Abschnitten der Dreiecksseiten verhalten sich, wie die aus den primären Abschnitten der Transversalen und den um die Seiten des innern Dreiecks verlängerten zu einander:

$a' . b' . c' : a'' . b'' . c'' = d' . e' . f' : (d' + k)(e' + l)(f' + g)$.

3. Wenn die Transversalen sich im nämlichen Punkte G durchschneiden, so sind die Producte der Sinus der primären und der secund. Winkel einander gleich. Fig. 86.

Denn werden die Seiten des innern Dreiecks g, k, l = o angenommen, so ist nach L. 2.

$$\sin.(\alpha', \beta', \gamma') = (\sin. \alpha'', \beta'', \gamma'').$$

4. Wenn die Transversalen sich in dem nämlichen Punkte G durchschneiden, so sind die Prod. aus den prim. und den secund. Seitenabschnitten einander gleich. Fig. 86.

Denn wenn g, k, l = o, so ist nach L. 2 Zus. $a' b' c' = a'' b'' c''$.

5. Wenn $a' . b' . c' = a'' . b'' . c''$, so durchschneiden die Transversalen einander in dem nämlichen Punkte G. Fig. 86.

Denn angenommen, c' sei nicht = AF, sondern etwa = AP, folglich c'' nicht = BF, sondern = BP,

so wäre zugleich $a' . b' . AP = a'' . b'' . BP$

und nach L. 4: $a' . b' . AF = a'' . b'' . BF$

also AP : AF = BP : BF, welches unmöglich ist.

6. Wenn $\sin. \alpha' . \sin. \beta' . \sin. \gamma' = \sin. \alpha'' . \sin. \beta'' . \sin. \gamma''$, so durchschneiden die Transversalen einander in dem nämlichen Punkte G. Fig. 86.

Denn angenommen, γ' sei nicht = ACF, sondern etwa = ACP, folglich γ'' nicht = BCF, sondern = BCP, so wäre zugleich

$$\sin. \alpha' . \sin. \beta' . \sin. ACP = \sin. \alpha'' . \sin. \beta'' . \sin. BCP,$$

(u. L. 3) $\sin. \alpha' . \sin. \beta' . \sin. ACF = \sin. \alpha'' . \sin. \beta'' . \sin. BCF$,

also $\sin. ACP : \sin. ACF = \sin. BCP : \sin. BCF$, welches unmöglich ist, sofern man für den beliebig anzunehmenden Winkel γ des Dreiecks eine seiner spitzen Winkel gewählt hat.

7. Wenn man an jede Spitze eines Dreiecks zwei gleiche äußere Winkel legt, so schneiden die nach den Durchschnitts- Fig. 87.

punkten der Schenkel gezogenen Transversalen einander in dem nämlichen Punkte G.

Denn es ist $AT:BT = \sin.\varepsilon:\sin.\delta$
$BR:CR = \sin.\varphi:\sin.\varepsilon$
$CS:AS = \sin.\delta:\sin.\varphi$

Also I) $AT.BR.CS = AS.BT.CR.$

Ferner $AT:CT = \sin.\gamma'':\sin.(\alpha+\delta)$
$CT:BT = \sin.(\beta+\varepsilon):\sin.\gamma'$
$BR:AR = \sin.\alpha'':\sin.(\beta+\varepsilon)$
$AR:CR = \sin.(\gamma+\varphi):\sin.\alpha'$
$CS:BS = \sin.\beta'':\sin.(\gamma+\varphi)$
$BS:AS = \sin.(\alpha+\delta):\sin.\beta'$

Also II) $AT.BR.CS:AS.BT.CR = \sin.(\alpha'',\beta'',\gamma''):\sin.(\alpha',\beta',\gamma')$

Aus diesen beiden Gleichungen und L. 6 folgt, daß die Transversalen einander in dem nämlichen Punkte durchschneiden müssen.

Zusatz. Werden über den Seiten eines Dreiecks gleichseitige oder auch winkelgleiche, gleichschenklige Dreiecke construirt, so sind dieses besondere Fälle des vorstehenden allgemeinen.

Fig. 88. 8. Wenn man durch die Seiten eines Dreiecks Kreise legt, welche je eine derselben berühren, so schneiden sie einander in dem nämlichen Punkte G, wofür $\sin.\alpha' = \sin.\beta' = \sin.\gamma'$ ist.

Denn construirt man um a als Sehne einen Kreis BGC, wovon b, und um b als Sehne einen Kreis AGC, wovon c Tangente ist, so hat man, CG und AG ziehend, (nach 261 L. 7) $\alpha' = \gamma'$ und $\gamma' = \beta'$, folglich $\alpha' = \beta'$, wonach a Berührungslinie für den, durch AGB beschriebenen Kreis ist.

294. Lehrsätze über den Flächeninhalt des Dreiecks.

Fig. 88. 1. Der Flächeninhalt (F) eines Dreiecks wird durch das halbe Product zweier Seiten in den Sinus des eingeschlossenen Winkels gegeben.

Denn es ist (275 L. 3) $F = \frac{1}{2}AB.CD = \frac{1}{2}c.b\sin.\alpha = \frac{1}{2}c.a\sin.\beta.$

2. Der Flächeninhalt eines Dreiecks wird durch die Quadratwurzel aus dem Producte der halben Summe seiner Seiten (P) in die, um jede einzelne Seite verminderte, halbe Summe gegeben.

Denn es ist (292 L. 6) $\cos. \alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

also $1 + \cos. \alpha = \frac{b^2+2bc+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}$

und $1 - \cos. \alpha = \frac{a^2-b^2+2bc-c^2}{2bc} = \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}$

Daraus folgt $1 - \cos. \alpha^2 = \frac{[(b+c)^2-a^2][a^2-(b-c)^2]}{4b^2c^2}$

oder $\sin. \alpha^2 = \frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4b^2c^2}$

also $F = \frac{c.b \sin. \alpha}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$

und wenn man $a + b + c = P$, $\frac{1}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}$ setzt:

$$F = \sqrt{\tfrac{1}{2}P(\tfrac{1}{2}P-a)(\tfrac{1}{2}P-b)(\tfrac{1}{2}P-c)}.$$

295. Aufgaben der Trigonometrie.

1. Die Catheten eines rechtwinkl. Dreiecks zu berechnen, Fig. 81 worin die Hypotenuse und ein Winkel gegeben sind.

Sei $a = 493,7$; $\gamma = 65° 40'$, so ist nach 291. (1) u. (2):

$$\log. c = \begin{cases} \log. a = 2,69346 \\ +\text{l.sin.}\gamma = 9,95960 - 10 \end{cases}$$

$$2,65306 = \log. 449,8.$$

$$\log. b = \begin{cases} \log. a = 2,69346 \\ +\text{l.cos.}\gamma = 9,61494 - 10 \end{cases}$$

$$2,30840 = \log. 203,4.$$

Also $c = 449,8$ und $b = 203,4$.

2. Die Hypotenuse aus einer Cathete und einem (an der gegenüberliegenden) Winkel zu berechnen.

Sei $b = 73,94$; $c = 115,3$; $\gamma = 57° 20'$; so ist nach 291;

$$\log. a = \begin{cases} \log. b = 1,86388 \\ -\text{l.cos.}\gamma = 9,72219 - 10 \end{cases}$$
$$2,13669 = \log. 136,9$$

$$\log. a = \begin{cases} \log. c = 2,06183 \\ -\text{l.sin.}\gamma = 9,92522 - 10 \end{cases}$$
$$2,13661 = \log. 136,9$$

3. Eine Cathete aus der andern und der Hypotenuse zu berechnen.

Sei $a = 3471$, $b = 1245$, so ist nach 291 (9):

$$\log. c = \begin{cases} \log.(a+b) = 3,67357 \\ +\log.(a-b) = 3,34753 \end{cases}$$
$$2: \quad 7,02110$$
$$3,51055 = \log. 3240.$$

4. Aus einer Seite und den anliegenden Winkeln eines Dreiecks eine seiner andern Seiten zu berechnen.

Sei $c = 4,378$; $\alpha = 43^\circ 20'$ und $\beta = 61^\circ 40'$, so ist $\gamma = 75^\circ$, und nach 292, L. 3.

$$\log. b = \begin{cases} \log. c = 0,64128 \\ +\text{l.sin}\beta = 9,94458 - 10 \\ \qquad 10,58586 - 10 \\ -\text{l.sin}\gamma = 9,98494 - 10 \end{cases}$$
$$0,60092 = \log. 3,989$$

5. Aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel eines Dreiecks die übrigen Stücke zu berechnen.

Sei die Seite $a = 317$; $b = 295$; $\gamma = 32^\circ 17'$, so könnte man ohne Anwendung der Logarithmen c nach 292 L. 6 oder 7. bestimmen. Will man aber Log. gebrauchen, so berechne man zunächst (nach L. 5) die Winkel α u. β. Nun ist $a+b = 612$, $a-b = 22$, $\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}(180^\circ - \gamma) = 73^\circ\ 51'\ 30''$, also:

$$\text{l. tg.}(\alpha-\beta) = \begin{cases} \log.(a-b) = 1,3424227 \\ +\text{l.tg}(\alpha+\beta) = 10,5384668 - 10 \\ \qquad 11,8808895 - 10 \\ -\log.(a+b) = 2,7867514 \end{cases}$$
$$9,0941381 = \text{l. tang. } 7^\circ 4' 49''.$$

Also $\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = 73° 51' 30''$.
und $\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = 7\ 4\ 49$
Durch Addition $\alpha = 80° 56' 19''$.
Durch Subtract. $\beta = 66° 46' 41''$.

Daraus findet man (nach 292 L. 3) $c = 171,45$.

6. Aus zwei Seiten und einem gegenüberliegenden Winkel die anderen Stücke des Dreiecks zu berechnen.

Sei $= a$ 73625, $b = 97241$, $\alpha = 43° 55'$, so ist nach 292 L. 3:

$$\log. \sin. \beta = \begin{cases} \log. b = 4,9878494 \\ +\ l. \sin. \alpha = 9,8411162 - 10 \\ \hline 14,8289656 - 10 \\ -\log. a = 4,8670253 \\ \hline 9,9619403 = l. \sin. 66° 21'. \end{cases}$$

Da aber $a < b$ angenommen, so wird β eben sowol stumpf als spitz sein können, d. h. entweder $= 66° 21'$ oder $= 113° 39'$. Für den einen und den andern Fall ist $\gamma = 69° 44$ oder $= 22° 26'$, und die Seite c (nach 292 L. 3) bestimmt durch:

1) $$\log. c = \begin{cases} \log. a = 4,8670253 \\ +\ l. \sin \gamma = 9,9722448 - 10 \\ \hline 14,8392701 - 10 \\ -\ l. \sin \alpha = 9,8411162 - 10 \\ \hline 4,9981539 = l. 99575. \end{cases}$$

2) $$\log. c = \begin{cases} \log. a = 4,8670253 \\ +\ l. \sin \gamma = 9,5816177 - 10 \\ \hline 14,4486430 - 10 \\ -\ l. \sin \alpha = 9,8411162 - 10 \\ \hline 4,6075268 = l. 40506. \end{cases}$$

Anm. In dieser Berechnung sind die Log. von a und sin. α dreimal gebraucht worden, wodurch sie im Grunde einfacher ist, als sie scheint.

7. Aus den drei Seiten eines Dreiecks einen seiner Winkel zu berechnen.

Sei $a = 3742$, $b = 2732$, $c = 2858$; so findet man nach

293. Allg. trig. Lehrsätze über die Transversalen im Dreieck.

Fig. 85. Die aus den Spitzen eines Dreiecks ABC gezogenen Transversalen AD, BE, CF mögen mit d, e, f, die ihnen zur Rechten liegenden oder primären Winkel mit α', β', γ', die secundären oder zur Linken liegenden mit $\alpha'', \beta'', \gamma''$ und eben so die, diesen Winkeln gegenüberliegenden primären oder secundären Seitenabschnitte mit a', b', c' oder a'', b'', c'' bezeichnet werden. Die Seiten des, von den Transversalen im Innern des gegebenen gebildeten, Dreiecks GKL deute man ferner durch g, k, l, und die übrigen Stücke derselben durch d', e', f; d'', e'', f'' an; so ist nach dieser Bezeichnung:

$$a = a' + a''; \quad b = b' + b''; \quad c = c' + c'';$$
$$\alpha = \alpha' + \alpha''; \quad \beta = \beta' + \beta''; \quad \gamma = \gamma' + \gamma'';$$
$$d = d' + k + d''; \quad e = e' + l + e''; \quad f = f' + g + f''.$$

Fig. 85. 1. Die Producte der primären und der secundären Seitenabschnitte im Dreieck verhalten sich zu einander, wie die Producte der Sinus ihrer gegenüberliegenden Winkel.

Denn es folgt aus 292 L. 3, daß:

$$a' : d = \sin.\alpha' : \sin.\beta$$
$$d : a'' = \sin.\gamma : \sin.\alpha''$$
$$b' : e = \sin.\beta' : \sin.\gamma$$
$$e : b'' = \sin.\alpha : \sin.\beta''$$
$$c' : f = \sin.\gamma' : \sin.\alpha$$
$$f : c'' = \sin.\beta : \sin.\gamma''$$

$$\text{Also } a'.b'.c' : a''.b''.c'' = \sin.(\alpha', \beta', \gamma') : \sin.(\alpha'', \beta'', \gamma'')$$

wenn man durch diese Abkürzung die Producte der drei Sinus andeuten will.

Fig. 85. 2. Die Producte aus den primären Abschnitten der Transversalen und den um die Seiten des inneren Dreiecks verlängerten verhalten sich, wie die Producte der Sinus der primären und der secundären Winkel.

Denn nach 292 L. 3 ist

$$d' : f' + g = \sin.\gamma' : \sin.\alpha''$$
$$e' : d' + k = \sin.\alpha' : \sin.\beta''$$
$$f' : e' + b = \sin.\beta' : \sin.\gamma''$$

$$\text{Also } d'e'f' : (d'+k)(e'+b)(f'+g) = \sin.(\alpha', \beta', \gamma') : \sin.(\alpha'', \beta'', \gamma'')$$

Zuſ. 2. Die Prod. aus den primären und ſecundären Abſchnitten der Dreiecksſeiten verhalten ſich, wie die aus den primären Abſchnitten der Transverſalen und den um die Seiten des innern Dreiecks verlängerten zu einander:

$$a' . b' . c' : a'' . b'' . c'' = d' . e' . f' : (d' + k)(e' + l)(f' + g).$$

3. Wenn die Transverſalen ſich im nämlichen Punkte G durchſchneiden, ſo ſind die Producte der Sinus der primären und der ſecund. Winkel einander gleich. Fig. 86.

Denn werden die Seiten des innern Dreiecks g, k, l = o angenommen, ſo iſt nach L. 2.

$$\text{sin.}(\alpha', \beta', \gamma') = (\text{sin.}\,\alpha'', \beta'', \gamma'').$$

4. Wenn die Transverſalen ſich in dem nämlichen Punkte G durchſchneiden, ſo ſind die Prod. aus den prim. und den ſecund. Seitenabſchnitten einander gleich. Fig. 86.

Denn wenn g, k, l = o, ſo iſt nach L. 2 Zuſ. a' b' c' = a'' b'' c''.

5. Wenn a' . b' . c' = a'' . b'' . c'', ſo durchſchneiden die Transverſalen einander in dem nämlichen Punkte G. Fig. 86.

Denn angenommen, c' ſei nicht = AF, ſondern etwa = AP, folglich c'' nicht = BF, ſondern = BP,

ſo wäre zugleich a' . b' . AP = a'' . b'' . BP

und nach L. 4: a' . b' . AF = a'' . b'' . BF

alſo AP : AF = BP : BF, welches unmöglich iſt.

6. Wenn sin. α' . sin. β' . sin. γ' = sin. α'' . sin. β'' . sin. γ'', ſo durchſchneiden die Transverſalen einander in dem nämlichen Punkte G. Fig. 86.

Denn angenommen, γ' ſei nicht = ACF, ſondern etwa = ACP, folglich γ'' nicht = BCF, ſondern = BCP, ſo wäre zugleich

$$\text{sin. } \alpha' . \text{sin. } \beta' . \text{sin. ACP} = \text{sin. } \alpha'' . \text{sin. } \beta'' . \text{sin. BCP}$$

(u. L. 3) $\text{sin. } \alpha' . \text{sin. } \beta' . \text{sin. ACF} = \text{sin. } \alpha'' . \text{sin. } \beta'' . \text{sin. BCF}$,

alſo sin. ACP : sin. ACF = sin. BCP : sin. BCF, welches unmöglich iſt, ſofern man für den beliebig anzunehmenden Winkel γ des Dreiecks eine ſeiner ſpitzen Winkel gewählt hat.

7. Wenn man an jede Spitze eines Dreiecks zwei gleiche äußere Winkel legt, ſo ſchneiden die nach den Durchſchnitts- Fig. 87.

punkten der Schenkel gezogenen Transversalen einander in dem nämlichen Punkte G.

Denn es ist $AT:BT = \sin.\varepsilon:\sin.\delta$
$BR:CR = \sin.\varphi:\sin.\varepsilon$
$CS:AS = \sin.\delta:\sin.\varphi$

Also I) $AT.BR.CS = AS.BT.CR.$

Ferner $AT:CT = \sin.\gamma'':\sin.(\alpha+\delta)$
$CT:BT = \sin.(\beta+\varepsilon):\sin.\gamma'$
$BR:AR = \sin.\alpha'':\sin.(\beta+\varepsilon)$
$AR:CR = \sin.(\gamma+\varphi):\sin.\alpha'$
$CS:BS = \sin.\beta'':\sin.(\gamma+\varphi)$
$BS:AS = \sin.(\alpha+\delta):\sin.\beta'$

Also II) $AT.BR.CS:AS.BT.CR = \sin.(\alpha'',\beta'',\gamma''):\sin.(\alpha',\beta',\gamma')$

Aus diesen beiden Gleichungen und L. 6 folgt, daß die Transversalen einander in dem nämlichen Punkte durchschneiden müssen.

Zusatz. Werden über den Seiten eines Dreiecks gleichseitige oder auch winkelgleiche, gleichschenklige Dreiecke construirt, so sind dieses besondere Fälle des vorstehenden allgemeinen.

Fig. 88. 8. Wenn man durch die Seiten eines Dreiecks Kreise legt, welche je eine derselben berühren, so schneiden sie einander in dem nämlichen Punkte G, wofür $\sin.\alpha' = \sin.\beta' = \sin.\gamma'$ ist.

Denn construirt man um a als Sehne einen Kreis BGC, wovon b, und um b als Sehne einen Kreis AGC, wovon c Tangente ist, so hat man, CG und AG ziehend, (nach 261 L. 7) $\alpha' = \gamma'$ und $\gamma' = \beta'$, folglich $\alpha' = \beta'$, wonach a Berührungslinie für den, durch AGB beschriebenen Kreis ist.

294. Lehrsätze über den Flächeninhalt des Dreiecks.

Fig. 88. 1. Der Flächeninhalt (F) eines Dreiecks wird durch das halbe Product zweier Seiten in den Sinus des eingeschlossenen Winkels gegeben.

Denn es ist (275 L. 3) $F = \frac{1}{2}AB.CD = \frac{1}{2}c.b\sin.\alpha = \frac{1}{2}c.a\sin.\beta.$

2. Der Flächeninhalt eines Dreiecks wird durch die Quadratwurzel aus dem Producte der halben Summe seiner Seiten (P) in die, um jede einzelne Seite verminderte, halbe Summe gegeben.

Denn es ist (292 L. 6) $\cos. \alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

also $1 + \cos. \alpha = \frac{b^2+2bc+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}$

und $1 - \cos. \alpha = \frac{a^2-b^2+2bc-c^2}{2bc} = \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}$

Daraus folgt $1 - \cos. \alpha^2 = \frac{[(b+c)^2-a^2][a^2-(b-c)^2]}{4b^2c^2}$

oder $\sin. \alpha^2 = \frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4b^2c^2}$

also $F = \frac{c.b \sin. \alpha}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$

und wenn man $a + b + c = P$, $\frac{1}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}$ setzt:

$$F = \sqrt{\tfrac{1}{2}P\,(\tfrac{1}{2}P - a)\,(\tfrac{1}{2}P - b)\,(\tfrac{1}{2}P - c)}.$$

295. Aufgaben der Trigonometrie.

1. Die Catheten eines rechtwinkl. Dreiecks zu berechnen, Fig. 81 worin die Hypotenuse und ein Winkel gegeben sind.

Sei $a = 493,7$; $\gamma = 65° 40'$, so ist nach 291. (1) u. (2):

$$\log. c = \begin{cases} \log. a = 2,69346 \\ +\text{l.sin.}\gamma = 9,95960 - 10 \end{cases}$$

$$2,65306 = \log. 449,8.$$

$$\log. b = \begin{cases} \log. a = 2,69346 \\ +\text{l.cos.}\gamma = 9,61494 - 10 \end{cases}$$

$$2,30840 = \log. 203,4.$$

Also $c = 449,8$ und $b = 203,4$.

2. Die Hypotenuse aus einer Cathete und einem (an- oder gegenüberliegenden) Winkel zu berechnen.

Sei $b = 73,94$; $c = 115,3$; $\gamma = 57° 20'$; so ist nach 291;

$$\log. a = \begin{cases} \log. b = 1,86888 \\ -\text{l. cos.}\gamma = 9,72219 - 10 \end{cases}$$
$$2,13669 = \log. 136,9$$

$$\log. a = \begin{cases} \log. c = 2,06183 \\ -\text{l. sin.}\gamma = 9,92522 - 10 \end{cases}$$
$$2,13661 = \log. 136,9$$

3. Eine Cathete aus der andern und der Hypotenuse zu berechnen.

Sei $a = 3471$, $b = 1245$, so ist nach 291 (9):

$$\log. c = \begin{cases} \log.(a+b) = 3,67357 \\ +\log.(a-b) = 3,34753 \end{cases}$$
$$2: \quad 7,02110$$
$$3,51055 = \log. 3240.$$

4. Aus einer Seite und den anliegenden Winkeln eines Dreiecks eine seiner andern Seiten zu berechnen.

Sei $c = 4,378$; $\alpha = 43° 20'$ und $\beta = 61° 40'$, so ist $\gamma = 75°$, und nach 292, L. 3.

$$\log. b = \begin{cases} \log. c = 0,64128 \\ +\text{l. sin}\beta = 9,94458 - 10 \\ \qquad 10,58586 - 10 \\ -\text{l. sin}\gamma = 9,98494 - 10 \end{cases}$$
$$0,60092 = \log. 3,989$$

5. Aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel eines Dreiecks die übrigen Stücke zu berechnen.

Sei die Seite $a = 317$; $b = 295$; $\gamma = 32° 17'$, so könnte man ohne Anwendung der Logarithmen c nach 292 L. 6 oder 7, bestimmen. Will man aber Log. gebrauchen, so berechne man zunächst (nach L. 5) die Winkel α u. β. Nun ist $a+b = 612$, $a-b = 22$, $\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}(180° - \gamma) = 73° 51' 30''$, also:

$$\text{l. tg.}(\alpha-\beta) = \begin{cases} \log.(a-b) = 1,3424227 \\ +\text{l. tg}(\alpha+\beta) = 10,5384668 - 10 \\ \qquad 11,8808895 - 10 \\ -\log.(a+b) = 2,7867514 \end{cases}$$
$$9,0941381 = \text{l. tang.}$$
$$7° 4' 49''.$$

Also $\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = 73° 51' 30''$.
und $\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = 7\ 4\ 49$
Durch Addition $\alpha = 80° 56' 19''$.
Durch Subtract. $\beta = 66° 46' 41''$.

Daraus findet man (nach 292 L. 3) $c = 171,45$.

6. Aus zwei Seiten und einem gegenüberliegenden Winkel die anderen Stücke des Dreiecks zu berechnen.

Sei $= a$ 73625, $b = 97241$, $\alpha = 43° 55'$, so ist nach 292 L. 3:

$$\log. \sin. \beta = \begin{cases} \log. b = 4,9878494 \\ +\ l. \sin. \alpha = 9,8411162 - 10 \\ \hline 14,8289656 - 10 \\ -\log. a = 4,8670253 \\ \hline 9,9619403 = l. \sin. 66° 21'. \end{cases}$$

Da aber $a < b$ angenommen, so wird β eben sowol stumpf als spitz sein können, d. h. entweder $= 66° 21'$ oder $= 113° 39'$. Für den einen und den andern Fall ist $\gamma = 69° 44$ oder $= 22° 26'$, und die Seite c (nach 292 L. 3) bestimmt durch:

1) $$\log. c = \begin{cases} \log. a = 4,8670253 \\ +\ l. \sin \gamma = 9,9722448 - 10 \\ \hline 14,8392701 - 10 \\ -\ l. \sin \alpha = 9,8411162 - 10 \\ \hline 4,9981539 = l. 99575. \end{cases}$$

2) $$\log. c = \begin{cases} \log. a = 4,8670253 \\ +\ l. \sin \gamma = 9,5816177 - 10 \\ \hline 14,4486430 - 10 \\ -\ l. \sin \alpha = 9,8411162 - 10 \\ \hline 4,6075268 = l. 40506. \end{cases}$$

Anm. In dieser Berechnung sind die Log. von a und sin. α dreimal gebraucht worden, wodurch sie im Grunde einfacher ist, als sie scheint.

7. Aus den drei Seiten eines Dreiecks einen seiner Winkel zu berechnen.

Sei $a = 3742$, $b = 2732$, $c = 2858$; so findet man nach

292 L. 8: $\frac{1}{2}(a+b+c) = 4666$; $\frac{1}{2}P - b = 1934$; $\frac{1}{2}P - c = 1808$;

$$\log.\sin.\tfrac{1}{2}\alpha = \left\{\begin{array}{r} \log.(\frac{1}{2}P-b) = 3{,}28646 \\ +\log.(\frac{1}{2}P-c) = 3{,}25720 \\ \hline 26{,}54366-20 \\ -\log. b = 3{,}43648 \\ -\log. c = 3{,}45606 \\ \hline 6{,}89254 \\ 2: 19{,}65112-20. \\ \hline 9{,}82556-10. \end{array}\right.$$

$= \log.\sin. 42°.$

Also ist $\alpha = 84°$, und die Winkel β und γ lassen sich nun leicht nach 292 L. 3 bestimmen.

8. Den Flächeninhalt eines Dreiecks zu bestimmen, wenn seine Winkel nebst einer Seite gegeben sind.

Sei $a = 325$, $\beta = 41° 15'$, $\gamma = 68° 42'$, also $\alpha = 70° 3'$, so ist (324 L. 1) $F = \frac{1}{2} ab \sin.\gamma$, und da (292 L. 3) $b : a = \sin.\beta : \sin.\alpha$ oder $b = \frac{a \,.\, \sin.\beta}{\sin.\alpha}$, auch

$F = \frac{a^2 \,.\, \sin.\beta \,.\, \sin.\gamma}{2 \sin.\alpha}$, also

$$\log. F = \left\{\begin{array}{r} 2\log. a = 5{,}0237668 \\ +\,l.\sin.\beta = 9{,}8191133-10 \\ +\,l.\sin.\gamma = 9{,}9692720-10 \\ \hline 24{,}8121521-20 \\ -\log. 2 = 0{,}3010300 \\ -\,l.\sin.\alpha = 9{,}9731236-10 \\ \hline 10{,}2741536-10 \\ \hline 4{,}5379985 = l{,}34514. \end{array}\right.$$

9. Aus den drei Seiten eines Dreiecks seinen Flächeninhalt zu berechnen.

Sei $a = 325$; $b = 227{,}97$; $c = 322{,}13$; so ist (nach 294 L. 2) $\frac{1}{2}P = 437{,}55$; $\frac{1}{2}P - a = 112{,}55$; $\frac{1}{2}P - b = 209{,}58$; $\frac{1}{2}P - c = 115{,}42$; also:

$$\log. F = \left\{\begin{array}{r} \log.\tfrac{1}{2}P = 2{,}6410277 \\ +\log.(\frac{1}{2}P-a) = 2{,}0513455 \\ +\log.(\frac{1}{2}P-b) = 2{,}3213498 \\ +\log.(\frac{1}{2}P-c) = 2{,}0622811 \\ \hline 2: 9{,}0760041 \\ \hline 4{,}5380022 = l{,}34514 \end{array}\right.$$

20. Den Ort eines Punktes P durch Rechnung zu bestimmen, an welchen drei, nach den gegebene Punkten A, B, C gezogene Linien die gegebenen Winkel π und φ einschließen.

Um aus den gegebenen W. B, π und φ die unbekannten α und γ zu bestimmen, deren Summe $\lambda = 4R - (B + \pi + \varphi)$ ist, setze man nach 292 L. 3:

$$\text{I.}\ \frac{AB}{BP} = \frac{\sin.\pi}{\sin.\alpha}; \qquad \text{II.}\ \frac{BP}{BC} = \frac{\sin.\gamma}{\sin.\varphi};$$

also $\frac{\sin.\gamma \,.\, \sin.\pi}{\sin.\alpha \,.\, \sin.\varphi} = \frac{AB}{BC}$ oder $\frac{\sin.\gamma}{\sin.\alpha} = \frac{AB \,.\, \sin.\varphi}{BC \,.\, \sin.\pi}$

und da $\sin.\gamma = \sin.(\lambda - \alpha) = \sin.\lambda \,.\, \cos.\alpha - \cos.\lambda \,.\, \sin.\alpha$:

$$\frac{\sin.\lambda \,.\, \cos.\alpha}{\sin.\alpha} - \frac{\cos.\lambda \,.\, \sin.\alpha}{\sin.\alpha} = \frac{AB \,.\, \sin.}{BC \,.\, \sin.\pi}$$

$$\text{oder}\ \cot.\alpha = \frac{AB \,.\, \sin.\varphi}{BC \,.\, \sin.\pi \,.\, \sin.\lambda} + \cot.\lambda.$$

Durch α ist auch γ bekannt, und dann die Linie BP nach I oder II leicht zu bestimmen.

Zweites Buch.

Die Geometrie des Raumes.

296. Lage im Raume. Die Betrachtung von Linien, Winkeln und Figuren wird begreiflich dann schwieriger und verwickelter, wenn wir dieselben nicht in der nämlichen Ebene voraussetzen, sondern in verschiedenen, außerhalb einander befindlichen, annehmen oder zu der allgemeinen Vorstellung des Raumes mit seinen drei Dimensionen übergehen, von denen bisher nur Länge und Breite betrachtet wurden. Das Hinzukommen einer neuen Ausdehnung führt für Bestimmung der gegenseitigen Lage der Linien auch neue Bedingungen ein und fordert die Betrachtung mehrerer Ebenen im Raume, deren Vorstellung durch die allgemeine Voraussetzung der früheren geometrischen Lehren ausgeschlossen blieb. Damit verbindet sich nothwendig eine neue Ansicht der Winkelgröße, wodurch die Neigung von Flächen im Raume auf ähnliche Weise gemessen und bestimmt werden könne, wie die Neigung zweier Linien in der Ebene bestimmt wurde.

297. Stereometrie. Die Verbindung der Höhen-Dimension mit denen der Länge und Breite führt zu einem allgemeinen Begriffe der räumlichen Gestalten oder Figuren, als dem bisher aufgestellten. Versteht man nämlich darunter überhaupt ein ringsum begränztes Ausgedehntes im Raume: so ist freilich die einfachste Art der Begränzung die durch Linien in der Ebene, die allgemeinere aber die Begränzung durch Flächen, wodurch diejenigen Raumformen entstehen, die man Körper zu nennen pflegt und auch sehr schicklich Raumfiguren nennen kann. Der besondere Zweig der Geometrie, welcher sich mit ihrer Untersuchung befaßt, wird unter dem Namen Stereometrie der Untersuchung der ebenen Figuren oder Planimetrie gegenübergestellt.

Erstes Kapitel.

Die Linien, Ebenen und Winkel.

298. Linien und Ebenen im Raume. Durch einen im Raume gegebenen Punkt können wir nach allen Richtungen desselben eine unbegränzte Menge gerader Linien gelegt uns vorstellen: sobald aber außer jenem noch ein zweiter Punkt gegeben wird, hört jede Unbestimmtheit auf, und es ist nur eine einzige — die beiden Punkte verbindende — gerade Linie möglich. Denken wir uns von dem gegebenen Punkte zwei Gerade nach verschiedenen Richtungen ausgehen, so schließen sie irgend einen Winkel ein; angenommen, es sei ein rechter und die eine der beiden Linien werde um die andere unbewegliche in Drehung versetzt, so wird dieselbe dadurch eine Ebene beschreiben, worauf die ruhende Linie senkrecht steht.

So wie eine unbegränzte Menge gerader Linien kann man auch unendlich viele Ebenen durch einen im Raume gegebenen Punkt gelegt denken: selbst wenn noch ein zweiter Punkt — oder eine beide verbindende gerade Linie — angenommen wird, ist die Lage der durch sie gelegten Ebene noch völlig unbestimmt, weil man sie um die Gerade (wie um eine feste Achse) in Drehung versetzt denken kann, und erst dann erhält sie eine bestimmte Lage im Raume, wenn sie einen gegebenen dritten, außer der Geraden liegenden, Punkt antrifft. Demnach ist durch drei Punkte des Raumes die Lage einer Ebene in demselben völlig bestimmt oder durch drei Punkte nur eine Ebene zu legen möglich.

299. Winkel im Raume. Durch einen Punkt außer einer geraden Linie lassen sich unendlich viele Gerade im Raume ziehen, welche die gegebene nirgends treffen. Aber nur die eine unter diesen Linien heißt der gegebenen parallel, welche sich in der, durch dieselbe und den Punkt gelegten, Ebenen befindet. Eine Gerade wird einer Ebene parallel genannt, wenn beide — unbegränzt verlängert — einander nirgends begegnen. Senkrecht zu derselben heißt sie, wenn alle durch ihren Treffpunkt in der Ebene gezogenen

weil in keiner Lage ein Dr. AGK gedacht werden kann, worin zwei Senkrechte AB vorkämen.

III. Die von der Senkrechten gleichweit entfernten geraden Linien AC, AD oder AE, AF sind einander gleich, und von zwei ungleich entfernten AC, AE ist die entferntere auch die längste Linie. (S. 249 L. 17.)

Fig. 90. 5. Wenn eine gerade Linie AB senkrecht auf drei anderen steht, so liegen diese in einer Ebene.

Denn angenommen, es sei durch zwei Linien BC und BF die Ebene MN gelegt, die dritte Gerade aber liege außerhalb derselben, etwa in der Richtung Bγ, so hat man, wenn Aγ und aus B nach dem Durchschnittspunkte G eine Linie gezogen wird, (nach L. 4) ABG = R und nach der Annahme ABγ = R, welches unmöglich ist.

Fig. 91. 6. Zwei auf einer Ebene senkrecht stehende Linien sind unter einander parallel.

Denn man verbinde ihre Fußpunkte B, D, lege an D einen rechten Winkel BDF, trage auf DF und BA gleiche Längen ab, und ziehe AD, AF u. BF, so ist Dr. FDB = ADB, folglich FB = AD, und da AB = DF, auch Dr. AFB = FAD. Folglich ist W. FDA = ABF = R oder FD senkrecht auf DA wie auf DB und DC, wonach (L. 5) diese drei Linien in einer Ebene liegen. Daraus aber folgt der Parallelismus.

Fig. 91. 7. Steht eine Linie AB senkrecht auf einer Ebene, so ist dieses auch mit jeder ihr parallelen DC der Fall.

Denn angenommen, die Par. CD sei gegen die Ebene geneigt, so muß eine aus ihrem Fußpunkt errichtete Senkrechte (nach L. 6) mit AB parallel sein; dann würden aber zwei aus D divergirende Linien mit AB parallel laufen, welches unmöglich ist.

Fig. 91. 8. Zwei Linien AC, EF sind parallel, wenn sie einer dritten im Raume BD parallel sind.

Denn denkt man sich BA und BE rechtwinklicht auf BD, und dann AE gezogen, so stehen sowol AC und EF (nach L. 7) als BD auf der Ebene ABE senkrecht, und sind deshalb (nach L. 6) einander parallel.

Fig. 92. 9. Eine, auf der Ebene MN im Punkte C geneigt stehende, gerade Linie CA schließt mit der nach dem Fuß-

punkt der Senkrechten gezogenen Linie CB einen kleineren Winkel ein, als mit einer beliebigen anderen CD in der Ebene.

Denn macht man CD = CB und zieht AD, so ist AD > AB, und deshalb (249 L. 14) W. ACD > ACB.

Anmerkung. Dieser kleinste Winkel, welcher von der Geneigten CA und einer, nach dem Fußpunkte der Senkrechten AB gezogenen, Linie CB eingeschlossen wird, heißt der Neigungswinkel der Geraden CA gegen die Ebene MN. Gleiche Neigung haben gerade Linien gegen eine Ebene, wenn die Neigungswinkel derselben einander gleich sind.

10. Wenn durch die Spitze K des Neigungswinkels einer Linie AK eine Gerade ED senkrecht auf den, in der Ebene MN liegenden Schenkel KB gezogen wird, so ist sie auch senkrecht zu der geneigten KA. Fig. 90.

Denn macht man KE = KD, und zieht aus A die Senkrechte AB, so wie AD, AE, so ist (249 L. 1) AE = AD, folglich AED ein gleichschenkliges Dreieck, und deshalb AK senkrecht auf ED.

11. Zwei gleichartige (spitze oder stumpfe) Winkel, deren Schenkel EB, FD und EA, FC parallel sind, sind einander gleich. — Fig. 91.

Denn macht man AE = CF u. EB = FD, so sind BD, EF, AC Parallelen von gleicher Länge und deshalb AB = CD, also Dr. AEB = CFD, und endlich W. E = F.

12. Zwei Parallelen AE, FC haben gegen eine schneidende Ebene MN gleiche Neigung. Fig. 91.

Denn macht man EA = FC und fällt die Senkrechten AB u. CD, so ist (nach L. 6 u. 11) W. EAB = W. FCD, also auch W. AEB = W CFD.

301. Lehrsätze über die gegenseitige Lage von Linien und mehreren Ebenen.

1. Wenn zwei Ebenen einander schneiden, so ist ihr gemeinschaftlicher Durchschnitt eine gerade Linie.

Denn lägen irgend drei Punkte desselben nicht in gerader Linie, so müßten beide Ebenen (nach 300 L. 1) in eine zusammenfallen, was gegen die Voraussetzung streitet.

Anm. Errichtet man in beiden Ebenen aus irgend einem Punkte ihrer Durchſchnittslinie Senkrechte, ſo iſt der von ihnen gebildete Neigungswinkel das Maaß des Flächenwinkels, welchen die Ebenen bilden. (299).

Fig 92. 2. Wenn eine Linie LE ſenkrecht auf einer Ebene MN ſteht, ſo gilt daſſelbe von jeder durch LE gelegten Ebene AS.

Denn denkt man ſich aus E eine Senkrechte EH auf AB in der Ebene MN gezogen, ſo iſt der N. W. LEH = R = LEB, folglich die Ebene AS ſenkrecht auf MN.

Fig. 93. 3. Wenn eine Ebene AS ſenkrecht auf einer anderen MN ſteht, ſo gilt daſſelbe von jeder, in ihr auf den gemeinſchaftlichen Durchſchnitt AB ſenkrecht gezogenen Linie LE.

Denn zieht man EH ſenkrecht auf AB, ſo iſt nach Vorausſ. W. HEL = R = W. LEA, folglich (nach 300 L. 4) LE ſenkrecht auf MN.

Fig. 93. Zuſatz. Wenn eine Ebene AS auf einer andern MN ſenkrecht ſteht, und auf dieſer aus einem Punkte E des Durchſchnitts eine Senkrechte errichtet wird, ſo muß dieſelbe ganz in AS liegen. Denn fiele ſie nicht mit der, in AS gezogenen Senkrechten EL zuſammen, ſo wären (gegen 300 L. 4. II) aus E auf MN zwei Senkrechte möglich.

Fig. 94. 4. Wenn zwei Ebenen AD, AF ſenkrecht auf einer dritten MN ſtehen, ſo gilt daſſelbe von ihrer gemeinſchaftlichen Durchſchnittslinie.

Denn wenn man aus A auf MN eine Senkrechte AC errichtet, ſo muß dieſe in beiden Ebenen AD und AF zugleich liegen, alſo ihre Durchſchnittslinie ſein.

Fig. 93. 5. Wenn zwei parallele Ebenen MN, PQ, durch eine dritte RS geſchnitten werden, ſo ſind die Durchſchnittslinien parallel.

Denn angenommen, ſie wären es nicht, ſo müßten auch die Ebenen MN, PQ einander irgendwo treffen, gegen die Vorausſetzung.

Fig. 93. 6. Steht eine gerade Linie LF ſenkrecht auf zwei Ebenen MN, PQ, ſo ſind dieſe parallel.

Denn angenommen, die in beiden Ebenen gezogenen Linien

EB, FD könnten einander in irgend einem Punkte (O) treffen, so müßten — weil LEB = R = LFD ist — die Linien OE und OF zwei Senkrechte aus O auf LF sein, welches unmöglich ist.

7. Hat eine gerade Linie LG gleiche Neigung gegen zwei Ebenen MN, PQ, so sind dieselben einander parallel. Fig. 93.

Denn fällt man aus einem beliebigen Punkte L die Senkrechte LF auf beide Ebenen, und denkt durch GLF eine Ebene gelegt, so folgt aus W. LKE = LGF, daß W. E = W. F = R, also (nach L. 6) MN mit PQ parallel ist.

8. Sind zwei Ebenen MN, PQ parallel, so ist eine, sie durchschneidende, gerade Linie LG gegen beide gleich geneigt. Fig. 93.

Denn wäre sie es nicht, so müßten die verlängerten KE, GF, folglich auch die Ebenen MN, PQ einander irgendwo treffen, gegen die Voraussetzung.

9. Die zwischen zwei parallelen Ebenen MN, PQ liegenden Parallelen AC, KG sind einander gleich. Fig. 93.

Denn eine durch dieselben gelegte Ebene AG schneidet MN und PQ (nach L. 5) in den Parallelen AK und CG; folglich ist AKGC ein Parallelogramm, und AC = KG.

10. Winkel im Raume mit parallelen Schenkeln, wie BAE, DCF, liegen in parallelen Ebenen. Fig. 94.

Denn macht man CF = AE, CD = AB, so entstehen zwei Parallelogramme AD und AF, wonach AC = BD = EF. Angenommen nun, daß eine durch C mit MN parallel gelegte Ebene von den Linien BD, EF in andern Punkten als D und F, etwa in G und H durchschnitten werde, so wären (nach L. 9) BG und EH = AC, gegen die Voraussetzung.

11. Sind drei (oder mehrere) Parallelen, welche nicht in derselben Ebene liegen, zwischen zwei Ebenen MN, PQ, einander gleich, so entstehen durch Verbindung der Treffpunkte in beiden Ebenen congruente Figuren, und sie selbst sind parallel. Fig. 94.

Denn I. Aus der Voraus. folgt, daß AD, AF, BF Parallelogramme, also die Linien AB = CD, AE = CF, EB = FD

parallel sind. In CDF sind also Seiten u. Winkel (nach L. 10) denen in ABE gleich, folglich beide Figuren congruent.

II. Der Parallelismus der Ebenen MN, PQ folgt unmittelbar aus L. 10.

Fig. 95. 12. Zwei gerade Linien AD, CB, welche drei parallele Ebenen durchschneiden, werden von diesen verhältnißgleich getheilt.

Denn sind A, F, D, die Durchschnittspunkte der einen, so wie C, G, B, der andern Geraden, und trifft die Verbindungslinie AB die Ebene PQ im Punkte E, so ist (nach L. 7) EF mit BD und EG mit AC parallel. Daraus folgt, daß AE:EB = AF:FD = CG:GB.

302. Aufgaben über die Lehrsätze von geraden Linien, Ebenen und Winkeln im Raume.

Fig. 96. 1. Aus einem gegebenen Punkte A auf eine Ebene MN eine Senkrechte zu fällen.

I. Man ziehe von A eine beliebige Geneigte AC von bestimmter Länge nach drei Punkten C, D, E in der Ebene, und lege durch dieselben einen Kreis, so ist dessen Mittelpunkt B (nach 300 L. 4) der Fußpunkt der Senkrechten AB.

II. Man ziehe in MN eine beliebige Gerade GK, auf diese aus A in AKG die Senkrechte AC, errichte dann in MN die Senkrechte CB auf GK und fälle darauf aus A in der Ebene ABC die Senkrechte AB, so ist diese zur ganzen Ebene MN senkrecht, weil BD (par. GK) es auf ABC ist. (S. 300 L. 7 u. 4).

Fig. 96. 2. Aus einem gegebenen Punkte C einer Ebene eine Senkrechte zu errichten.

Man fälle aus irgend einem Punkte A (nach A. 1) eine Senkrechte, lege durch diese und den Punkt C eine Ebene, und ziehe darin CL mit BA parallel, so ist sie (nach 300 L. 7) auf MN senkrecht.

Fig. 93. 3. Durch eine gerade Linie FL und einen außer ihr liegenden Punkt A eine senkrechte Ebene zu legen.

Man lege eine Ebene RS durch den Punkt und die Gerade, fälle in derselben AE senkrecht auf FL, und errichte (nach A. 2) aus E auf RS die Senkrechte EH, so bestimmen (nach 300 L. 4) die Linien EA, EH die gesuchte Ebene.

4. Durch einen gegebenen Punkt C eine Ebene PQ mit einer gegebenen Ebene MN parallel zu legen. Fig. 94.

Man ziehe aus C auf die Ebene MN eine beliebige Gerade CA, lege durch dieselbe in willkührlicher Richtung zwei Ebenen AD, AF, und ziehe in diesen CD und CF den Durchschnittslinien parallel, so ist (nach 301 L. 10) auch die Ebene PQ, welche durch den W. DCF gelegt ist, der Ebene MN parallel.

Zweites Kapitel.

Die ebenflächigen Körper.

303. **Raumfigur.** Wenn ebene oder gekrümmte Flächen einen Raum vollständig begränzen, so bildet ihre Verbindung eine **körperliche Gestalt** oder **Raumfigur**. In den ebenflächigen (d. h. von ebenen Flächen begränzten) Körpern werden diese Flächen **Seiten**, die Durchschnittslinien aber, in welchen je zwei Seiten einander treffen, **Kanten** genannt. Da, wo drei oder mehrere, Ebenen einander in dem nämlichen Punkte durchschneiden entsteht eine **Ecke**, und nach der Anzahl solcher Ecken kann man die Raumfiguren mit Rücksicht auf die Menge ihrer Seiten und Kanten eintheilen und benennen. Der allgemeinste Name ist **Raum-Vieleck** (**Polyeder**); kommen in demselben m Seiten, n Kanten und r Ecken vor, so kann man es bestimmter ein **m-seitiges** und **n-kantiges r-Eck** nennen. Sollten unter diesen dreierlei Bestandtheilen einer Raumfigur einige enthalten sein, welche andere ihrer Lage und Größe nach mit Nothwendigkeit bestimmen, so muß man sie als **bestimmende** von diesen als den **abhängigen** Größen unterschieden.

Unter **Diagonalen** versteht man auch hier gerade Linien, welche Eckpunkte der Figur mit einander verbinden; unter **Diagonal-Ebenen** solche, die durch eine Kante und irgend eine gegenüberliegende Ecke gelegt sind, also einen Flächenwinkel zweier Seiten durchschneiden. Sollten Raumfiguren mit gleichen Seiten, Kanten und Winkeln möglich sein, so mögen sie vorzugsweise **reguläre Körper** genannt werden.

304. Congruenz und Symmetrie. Wie bei den Figuren der Ebene sagt man auch von denen des Raumes, daß sie einander decken oder congruiren, wenn sie — als in einander liegend vorgestellt — in eine und dieselbe Raumfigur zusammenfallen würden. Man kann sich aber auch zwei körperliche Gestalten vorstellen, welche — zu beiden Seiten einer Ebene liegend — von jedem Punkte derselben gleichweit abstehen, dergestalt, daß jede, durch die Ebene gelegte, Senkrechte sie in gleichen Entfernungen durchschneide. Raumfiguren, welche dieser Bedingung entsprechen, werden symmetrisch genannt. Mögen auch ihre einzelnen Bestandtheile, Seiten, Kanten und Ecken, einander gegenseitig gleich sein, so folgt daraus doch, keineswegs, daß sie einander decken werden, wie sich dieses
Fig. 7. aus der Gleichheit der Stücke zweier Dreiecke ABC, ABG ergab, da hier die eine Figur, umgewendet auf die andere gelegt, mit ihren Seiten und Winkeln völlig mit derselben zusammenfallen mußte, was offenbar von symmetrischen Raumfiguren nach der obigen Definition nicht behauptet werden darf.

Fig. 97. 305. Raumecke. Denkt man sich, wenn mehrere gerade Linien in dem nämlichen Punkte M zusammentreffen, je zwei benachbarte derselben durch Ebenen verbunden, so erhält man die Vorstellung einer Raumecke (körperlichen Ecke) MABC, die man kürzer mit (M) bezeichnen kann. Die einschließenden, als unbegränzt gedachten, Winkel-Ebenen AMB, AMC ..... werden Seiten und der gemeinschaftliche Treffpunkt ihrer Kanten der Scheitel der Raumecke genannt. Da jede Seite an einer Kante endigt, mit welcher die folgende wieder anfängt, bis endlich die letzte Seite sich an die erste schließt, so müssen Seiten und Kanten einer Raumecke stets in gleicher Anzahl vorhanden sein. Da ferner in jeder Seite von zwei Kanten ein Linienwinkel (Kantenwinkel) und eben so an jeder Kante von zwei Ebenen ein Flächenwinkel gebildet wird, so hat eine Raumecke die Winkel beider Arten mit Seiten und Kanten in gleicher Menge.

Die einfachste unter allen Raumecken ist offenbar die von drei Seiten eingeschlossene oder dreiseitige, und jede

vielseitige wird sich, indem man immer drei benachbarte Kanten zusammenfaßt und durch Ebenen verbindet, in einzelne Theile jener Art zerlegen lassen. Obgleich man sich die Seitenebenen sammt den Kanten, worin sie einander schneiden, als unbegränzt vorstellen kann, nimmt man doch zur Veranschaulichung der Construction eine willkührliche Begränzung beider dadurch vor, daß man die Kanten der Raumecke von gleicher Länge, oder die Richtungspunkte derselben in gleichen Abständen vom Scheitel und unter einander verbunden denkt. Nach dieser Vorstellungsart erscheinen die Seitenebenen sämmtlich als gleichschenklige Dreiecke, wie AMB, AMC, BMC. Die von ihnen gebildeten Flächenwinkel werden am zweckmäßigsten durch griechische Buchstaben α, β, γ.... angedeutet, welche den Kanten MA, MB, MC... entsprechen. Durch Verlängerung der Kanten und Seitenflächen über den Scheitelpunkt hinaus entsteht eine, der gegebenen entgegenstehende Vertical-Raumecke von gleicher Anzahl Winkel und Seiten. Wo von einer Raumecke ohne nähere Bezeichnung der Seitenzahl die Rede ist, versteht man immer die dreiseitige darunter. Sollten ihre drei Seiten einander gleich sein, so darf man sie eine gleichseitige, wenn aber nur zwei Seiten gleich sind, eine gleichschenklige nennen. Denkt man sich aus dem Scheitelpunkte einer Raumecke auf ihren Seiten drei Senkrechte MP, MQ, MR, errichtet und durch Ebenen verbunden, so entsteht eine neue, zu jener in bestimmter Beziehung stehende, die man ihre Ergänzungsecke zu nennen pflegt. (Fig. 100).

306. Lehrsätze über die dreiseitige Raumecke.

1. In einer gleichschenkligen Raumecke liegen gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber. Fig. 97.

Denn man fälle aus A die Senkrechten AP, AK und AG auf die Seitenebene BMC u. ihre Kanten, und ziehe Linien von P nach B, C, K, G, so entstehen vier rechtw. Dreiecke, von denen (nach 249 L. 19) Dr. ABP = ACP, u. wegen Dr. AMK = AMG auch Dr. APK = APG sein muß, woraus W. AKP = W. AGP, d. i. $\beta = \gamma$, folgt.

Fig. 97. 2. Sind in einer Raumecke zwei Winkel einander gleich, so sind es auch die gegenüberliegenden Seiten.

Denn aus AGP = AKP folgt (249 L. 15) AG = AK, u. hieraus (249 L. 19) GM = KM, also Dr. AMG = AMK, u. W. AMC = W. AMB.

Fig. 98. 3. Eine gleichschenklige Raumecke wird durch eine Ebene, die den Winkel der gleichen Seiten halbirt, in zwei rechtwinklige symmetrische Raumecken zerlegt.

Denn zieht man von B und C die Senkrechten BK, CK, oder legt durch BC eine Ebene senkrecht zur Kante MA, und durch diese eine andere MAL so, daß W. BKC von ihr halbirt wird, so ist (249 L. 19) KB = KC, und deshalb (251 L. 1) auch BL = CL. Demnach steht BC senkrecht auf LK, LA u. LM, d. h. auf der Ebene MAL, und eben so (nach 301 L. 2) die Ebene BMC. Da nun, wenn im Dr. ABC mit BC eine Par. bc, und mit dieser im Dr. Mbc eine Par. mn gezogen wird, die Punkte m und n gleichweit von der Durchschnittsebene abstehen müssen, so sind beide Theile der R. E. symmetrisch. (304).

Zusatz. Wird der Neignngswinkel zweier Ebenen AMB, AMC, durch eine dritte AMI halbirt, so sind die aus irgend einem Punkte I derselben auf jene Ebenen gefällten Senkrechten, IB und IC, einander gleich.

Denn legt man durch I auf die Kante MA eine senkrechte Ebene, so ist, da (249 L. 15) Dr. BKI = CKI, auch IB = IC.

Fig. 98. 4. Werden auf eine Ebene MBC durch die geneigte Linie AM eine senkrechte Ebene AML und zwei andere, unter gleichen Winkeln von derselben abstehende, AMB und AMC, gelegt, so bilden diese mit der ersten eine gleichschenklige Raumecke.

Denn zieht man aus K die Senkrechten KB, KC, KL auf AM, so ist sowohl die Ebene BKC als auch BMC, und folglich ihr Durchschnitt BC auf der Ebene AML senkrecht. Dann sind aber die Dr. BKC, BAC gleichschenklig, mithin AMB = AMC.

Fig. 99. 5. Sind in zwei Raumecken (M) und (N) zwei Seiten nebst eingeschlossenem Winkel einander gegenseitig gleich, so sind es auch die anderen Winkel nebst der dritten Seite.

Denn entweder kann man beide R. E. (I und II) so in einander gelegt sich vorstellen, daß β mit ε, ENF mit BMC und DNE mit AMB, also auch alle Kanten, zusammenfallen, wonach die R. E. congruent sein müssen; oder man denkt sie (I und III) mit einer gleichen Seite BMC = ENF und gleichen W. $\beta = \varepsilon$ an einander gelegt, und dann ist, weil Dr. ABL = DBL, welches aus AK = KD und AP = PD folgt, auch W. ABL = DBL, folgl. AC = CD, u. (M) ACD eine gleichschenkl. R. E., woraus sich endlich W. AGP = DGP, d. i. $\gamma = \varphi$, $\alpha = \delta$ ergiebt.

6. Sind in zwei Raumecken eine Seite und die beiden anliegenden Winkel einander gegenseitig gleich, so sind es auch die anderen Seiten nebst dem dritten Winkel. Fig. 99.

Denn entweder müssen (M) und (N), mit BMC = ENF, $\gamma = \varphi$ und $\beta = \varepsilon$ in einander gelegt, congruiren, weil die Winkel nicht gleich sein könnten, wenn nicht DN mit AM zusammenfiele; oder denkt man sich jene Seiten der R. E. an einander, und durch MA eine Ebene senkrecht auf BMC gelegt, so sind die R. Ecken (M) ABD und (M) ACD (nach L. 4) gleichschenklig, also AMB = DMB, AMC = DMC, und $\alpha = \delta$.

7. Sind in zwei Raumecken (M) und (N) drei Seiten einander gleich, so sind es auch die ihnen gegenüberliegenden Winkel. Fig. 99.

Denn entweder entstehen, wenn man sich aus A und D Senkrechte auf die gegenüberliegenden Kanten gezogen und andere aus den Treffpunkten K u. G derselben in den Seitenebenen BMC, ENF errichtet denkt, (nach 253 L. 3) congruente Vierecke, deren Punkte P und Q mithin beim Zusammenlegen auf einander fallen müssen, und AP, DQ sind als Intersectionen senkrechter Ebenen Perpendikel auf BMC und ENF; folgl. (249 L. 19) Dr. AKP = DRQ u. Dr. AGP = DSQ, woraus $\beta = \varepsilon$ und $\gamma = \varphi$ sich ergiebt; oder man stelle sich die R. E. (M) und (N) mit BMC = ENF an einander gelegt vor, so entstehen, wenn durch AMD eine schneidende Ebene gelegt wird, zwei gleichschenklige Raumecken, woraus durch Summirung $\alpha = \delta$ gefunden wird. Dann sind aber auch (nach L. 5) $\beta = \varepsilon$ und $\gamma = \varphi$.

Fig. 90. 8. Gränzen in zwei seitengleichen Raumecken, wenn sie mit einer Seite an einander gelegt werden, gleiche Seiten an einander, so sind sie symmetrisch.

Denn da sie, durch eine Ebene AMD geschnitten, zwei gleichschenkl. R. E. bilden, worin (nach L. 7) die Winkel an K und G halbirt werden, so ergiebt sich der Beweis aus L. 3.

Fig. 90. 9. Liegen in zwei seitengleichen Raumecken, wenn sie mit einer Seite an einander gelegt werden, gleiche Seiten einander gegenüber, so sind sie congruent.

Denn zieht man in der gemeinsch. Seite BMC die halbirende ML und denkt sich die eine R. E. um dieselbe als Achse gedrehet bis B in C und C in B fällt, so müssen (nach L. 7) beide Raumecken congruiren.

Fig. 97. 10. Der größeren Seite einer Raumecke liegt auch der größere Winkel gegenüber.

Denn aus der Voraussch. AMC > AMB, also AC > AB folgt (249 L. 17) daß PC > PB. Ferner muß, weil (249 L. 18) AG > AK ist, auch PG > PK, und deshalb (250 L. 7 Zus.) W. AKP > AGP, d. i. $\beta > \gamma$ sein.

Fig. 97. 11. Dem größeren Winkel einer Raumecke liegt auch die größere Seite gegenüber.

Denn die Annahme, daß dem kleinern Winkel die größere Seite in einer R. E. gegenüberliegen könne, ist mit dem L. 10 unverträglich.

12. Zwei Seiten einer Raumecke zusammen genommen sind stets größer, als die dritte.

Denn denkt man sich durch die Kante AM der beiden kleineren Seiten eine Ebene AML senkrecht zur größten Seite BMC gelegt, so entstehen zwei rechtwinkl. Raumecken, worin (nach L. 11) AMB > LMB und AMC > LMC, folglich AMB + AMC > BMC ist.

13. In einer Raumecke (M) ABC und ihrer Ergänzungsecke (M) PQR stehen die Kanten der einen auf den Seiten der andern gegenseitig senkrecht.

Denn aus der Voraussetzung, daß MP auf BMC, MR auf AMB, und MQ auf AMC senkrecht stehen, folgt, daß MB zugleich mit MP und MR, MA mit MR und MQ, MC mit MQ

und MP rechte Winkel bilde, also (300 L. 4) daß MA auf QMR, MP auf PMR, und MC auf PMQ senkrecht stehen müsse.

Zusätze. I. Es ist für eine gegebene Raumecke nur eine Ergänzungsecke möglich, weil nicht mehrere Senkrechte aus dem nämlichen Punkte einer Ebene errichtet werden können.

II. Die ursprünglich gedachte Raumecke kann wiederum als abgeleitet von ihrer Ergänzungsecke betrachtet werden.

14. In einer Ergänzungsecke (M) PQR sind die Seiten der Supplemente von den Winkeln der gegebenen Raumecke (M) ABC. Fig. 100

Denn denkt man sich die Ebenen AMB und BMC verlängert, bis sie PMR in MN und MO durchschneiden, so ist (nach L. 13) BM eine Senkrechte auf MN und MO, folgl. NMO der Winkel, welcher die Neigung der Ebenen AMB u. BMC mißt. Da nun ferner (300 L. 4) RM zu MN und PM zu MO senkrecht ist, so ist W. NMP + PMS = W. NMP + NMO, also W. NMO = PMS oder (2R — PMR).

15. Durch die drei Winkel einer Raumecke werden zugleich die drei Seiten derselben bestimmt.

Denn nach L. 13 und 14 bestimmen die Winkel einer Raumecke die Seiten ihrer Ergänzungsecke und deren Winkel wiederum die Seiten der ersteren.

16. Zwei Vertical-Raumecken sind symmitrisch. Fig. 101

Denn die Seiten derselben sind als Verticalwinkel einander gleich, also AMC = FMD, AMB = DME, BMC = FME; und wenn man AMC an DMF gelegt denkt, so daß D in A und F in C fallen, gränzen gleiche Seiten AMB, ADE und BMC, EMF an einander; folglich sind die R. E. (nach L. 8) symmetrisch.

Anmerkung. Die hier über die dreiseitige Raumecke aufgestellten Lehrsätze gelten nicht minder, wenn die Seiten unter stumpfen Winkeln gegen einander geneigt sind. Nur müssen zur Beweisführung in der Construction zwei Seitenebenen AMC, AMB verlängert werden, wodurch eine Raumecke (M) AFE entsteht, deren eine Seite Ebene von der aus

Fig. 101 gefällten Senkrechten in P getroffen wird. In dieser Neben-Raumecke sind nämlich eine Seite und ein Winkel dieselben, wie in der gegebenen, und zwei andere Seiten und Winkel Ergänzungen zu 2 R der anderen beiden, welche in der gegebenen vorkommen. Folglich werden in jeder Raumecke die Seiten und Winkel nebst ihrer gegenseitigen Lage durch diejenigen ihrer Nebenraumecke völlig bestimmt und dadurch die, für diese gültigen Sätze, auch auf jene anwendbar.

Fig. 102 307. Pyramide. Wenn man außerhalb der Ebene einer ebenen Figur ABCD.... einen Punkt M, und durch die Seiten derselben und diesen Punkt Verbindungsebenen gelegt denkt, so entsteht jene körperliche Gestalt, die man Pyramide nennt. Da die Ebenen einander in Kanten durchschneiden, welche den Punkt M mit den Ecken A, B, C, D... verbinden, so wird dieser Körper von einer Reihe von Dreiecken eingeschlossen, die sich an jene bestimmende Figur, die Basis der Pyramiden, als Seiten derselben schließen und sich sämmtlich in M, ihrer Spitze oder dem Scheitel vereinigen. Hiernach stimmt die Anzahl der Seiten einer Pyramide mit derjenigen ihrer Basis überein, und es wird drei- vier- und mehrseitige geben müssen. Unter Höhe einer Pyramide versteht man die aus ihrer Spitze auf die Basis-Ebene gefällte Senkrechte, unter Transversal-Ebene eine neue durch M in irgend einer Richtung gelegte, sie durchschneidende, Ebene. Sollten Pyramiden mit regulärer Basis, durchgängig gleichen Seiten und eben solchen Winkeln derselben möglich sein, so mögen sie zur Unterscheidung reguläre genannt werden.

308. Lehrsätze über die Pyramide.

1. Dreiseitige Pyramiden sind congruent oder symmetrisch, wenn

(1) zwei Seiten nebst eingeschlossenem Winkel;

(2) eine Seite nebst den beiden anliegenden Winkeln und der gegenüberliegenden Kante;

(3) alle drei Seiten; in ihnen gegenseitig gleich sind.

Die Beweise folgen unmittelbar aus 306, L. 5—9.

Fig. 102 2. Congruente oder symmetrische vielseitige Pyramiden lassen sich in dergleichen dreiseitige zerlegen.

Denn es ist (nach L. 1) (M) ABC mit (N) GHI, (M) ACF mit (N) GIO u. s. w. wegen Gleichheit der Seiten congruent oder symmetrisch.

3. Wenn in zwei Pyramiden (M) und (N) die einzelnen Seiten und deren Reihenfolge nebst der Basis übereinstimmen, so sind sie congruent. Fig. 102

Denn theilt man die congruenten Basispolygone durch Diagonalen in eben solche Dreiecke, so sind (nach L. 1) die einzelnen dreis. Pyr. einander congruent, und deshalb auch (M) $\equiv$ (N).

4. Zwei Pyramiden (M) und (N), worin außer der Basis auch die einzelnen Seiten übereinstimmen, aber in entgegengesetzter Ordnung auf einander folgen, sind symmetrisch. Fig. 102

Denn denkt man sich die Pyr. mit der Basis an einander gelegt, so daß deren gleiche Seiten zusammenfallen, so sind (nach L. 1) die einzelnen dreis. Pyr. und folglich auch die aus ihnen zusammengesetzten (M) und (N) symmetrisch.

5. Wenn man durch die Kanten einer Pyramide (M) auf die Basis senkrechte Transversal-Ebenen legt, so schneiden sie einander in derselben Geraden MP. Fig. 102

Denn da der Durchschnitt je zwei senkrechter Ebenen AMP, BMP... auf der Basis senkrecht steht, und alle durch den Scheitelpunkt M gehen, so fallen sie nothwendig in eine Linie zusammen.

6. Die Kantenwinkel an der Spitze einer Pyramide betragen zusammen stets weniger, als vier rechte Winkel. Fig. 102

Denn fällt man die Senkrechte MP und zieht PA, PB, PC...., so ist (nach 249 L. 12) W. AMB $\prec$ APB, W. BMC $\prec$ BPC....., also die Summe der Kantenwinkel an der Spitze kleiner, als die der Winkel um P, d. h. 4 R. — Fiele MP nicht in die Pyr., so nehme man statt der Basis eine belieb. Durchschnittsebene, für welche es der Fall sein würde, und der Beweis bleibt der vorige.

7. Wenn man durch die Kanten einer dreiseitigen Pyramide (M) Transversal-Ebenen legt, welche die Winkel halbiren, so schneiden sie einander in der nämlichen Linie MP. Fig. 103

Denn es sei MP der Durchschnitt der Ebenen AMP, BMP,

welche die W. α und β halbiren, und aus dem belieb. Punkte L deſſelben auf jede Seite eine Senkrechte gefällt, ſo iſt (306 L. 3.3) $LG = LI = LH$, und wenn man von G und H Senkrechte auf die Kante MC zieht, Dr. $LGF = LHF$, folglich LF die Halbirungslinie des W. GFH oder γ, wonach alle drei Transverſal-Ebenen ſich in der nämlichen Linie MP ſchneiden.

Fig. 103 8. Wenn durch die Kanten einer dreiſeitigen Pyramide dergeſtalt Transverſal-Ebenen gelegt werden, daß ſie die Winkel oder Seiten des Baſis-Dreiecks halbiren, ſo ſchneiden ſie einander in der nämlichen Linie MP.

Denn da ihre Durchſchnitte mit der Baſis (nach 251 L. 7 und 267 L. 4) in beiden Fällen einander in demſelben Punkte P treffen, alſo P und M den Durchſchnitten der Ebene gemeinſchaftliche Punkte ſind, ſo fallen dieſe in der Linie MP zuſammen.

Fig. 102 9. Wenn man auf dem Mittelpunkte eines regulären Polygons ABCD.... eine Senkrechte errichtet und einen Punkt M derſelben durch Dreiecke mit den Seiten der Baſis verbindet, ſo entſteht eine reguläre Pyramide.

Denn es ſind (249 L. 4) alle Seiten der Pyr. und nicht minder (306 L. 7) ſämmtliche Winkel derſelben, $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ einander gleich. Ein gleiches gilt von den Winkeln, welche die Seiten mit der Baſis bilden.

Fig. 102 10. Zwei reguläre Pyramiden ſind congruent, wenn die Baſis und eine Seitenkante in beiden gegenſeitig gleich ſind.

Denn errichtet man aus den Mittelpunkten P und Q der regulären und congruenten Grundflächen Senkrechte, und trägt die gleichen Seitenkanten AM, GN aus A und G auf ihnen ab, ſo ſind (249 L. 1) alle Seitenkannten aus M und N, und folglich auch alle Seiten einander gleich. Da hieraus endlich noch (306 L. 7) die Gleichheit der Raumecken an A, B, C... und G, F, H, ... folgt, ſo müſſen die Pyramiden ſich decken.

Fig. 104 309. Prisma. Denkt man ſich einer ebenen Figur ABCD... eine ihr congruente abcd... im Raume dergeſtalt parallel gelegt, daß auch die Seiten beider einander parallel laufen und dieſe paarweiſe durch Ebenen verbunden ſo entſteht ein Prisma. Die Seitenflächen dieſes Körpers ſind augenſcheinlich Parallelogramme, weil ſie zwei Parallelen von gleicher Länge, $AB = ab$, $BC = bc$, ... zu

Seiten haben, und ihre Anzahl muß mit derjenigen der Basis-Seiten übereinstimmen. Daher wird man, jenachdem dieser drei, vier oder mehrere sind, auch drei-, vier- oder überhaupt vielseitige Prismen haben. Unter Höhe eines Prisma versteht man die aus irgend einem Punkte der einen Grundfläche auf die Ebene der andern gefällte Senkrechte. Sind die Grundflächen Parallelogramme, so heißt das Prisma ein Parallelepipedon, und wenn die Seiten senkrecht zur Basis stehen, ein gerades oder senkrechtes. Gerade Prismen mit regulären Grundflächen pflegt man wol zur Unterscheidung reguläre zu nennen.

310. Lehrsätze über das Prisma.

1. Ein vielseitiges Prisma von n Seiten läßt sich in (n−2) dreiseitige zerlegen. Fig. 104

Denn da die congruenten n-Ecke ABCD..., abcd... (nach 254) in (n — 2) Dreiecke zerfallen, so theilen die Diagonal-Ebenen Ac, Ec.... das gegebene Prisma in eben so viele dreiseitige.

2. Wenn in zwei Prismen Ac, Fh, außer der Basis die einzelnen Seiten und deren Reihenfolge übereinstimmen, so sind sie congruent. Fig. 104 I u. II.

Denn denkt man FGH.... auf ABC... gelegt, so ist (306 L. 7) die R. E. (A) = (F), (B) = (G), u. s. f. Mithin fallen auch die Kanten ab und fg, bc und gh,.... und demzufolge die ganzen Prismen zusammen.

3. Zwei Prismen, worin außer der Basis auch die einzelnen Seiten übereinstimmen, aber in entgegengesetzter Ordnung folgen, sind symmetrisch. Fig. 104 I u. III.

Denn denkt man sich die Pr. mit der Basis zusammengelegt u. deren gleiche Seiten in einander fallend, so sind (306 L. 8) die R. E. (A) und (F), (B) und (G).... symmetrisch, und weil Aa = Ff, Bb = Gg,.... nicht minder die ganzen Prismen.

4. Die gegenüberliegenden Seiten eines Parallelepipedons sind congruent und parallel. Fig. 105

Denn da AB und DC, so wie ab und dc, und eben so Aa, Dd als Seiten eines Parallelogramms einander gleich und parallel sind, so ist auch W. aAB = W. dDC; folglich sind die Sei-

tenflächen Ab und Dc (253 L. 7) einander congruent und (301 L. 10) ebenfalls parallel.

Fig. 109 Zusatz. Sind die Spitzen eines geraden Parallelepipedons, dessen Basis ein Quadrat ist, ebenfalls Quadrate, so wird es Würfel oder Cubus genannt.

Fig. 105 5. In einem Parallelepipedon sind die entgegengesetzten Raumecken symmetrisch.

Denn es sind die drei Kantenwinkel gleich und wenn man (b) mit W. Bba u. W. dDC der Ecke (D) gelegt denkt, gränzen die gleichen an einander, welches (306 L. 8) Merkmal der Symmetrie ist.

Fig 105 6. Ein Parallelepipedon wird durch eine Diagonal-Ebene Ac in zwei symmetrische dreiseitige Prismen zerlegt.

Denn denkt man das dreiseitige Prisma ACd mit der Basis ACD so an ACB gelegt, daß D und B zusammenfallen, so sind (306 L. 7 u. 8) die R. E. in A, B und C symmetrisch, und wegen der gleichen Kanten, ebenfalls die ganzen Prismen.

Fig. 105 7. Die Diagonalen eines Parallelepipedons sind Parallelogramme.

Dieß folgt (nach 249 L. 1) aus AC = ac u. BD = bd.

Fig. 105 8. Alle Diagonal-Ebenen eines Parallelepipedons durchkreuzen einander in dem nämlichen Punkte.

Denn durch je zwei einander durchkreuzende Diagonalebenen, wie ABcd, abCD, wird das Parp. Ac in vier dreiseitige Prismen getheilt, wovon je zwei (nach L. 3) symmetrisch sind. Die gemeinschaftlichen Kanten dieser Prismen, wie Pp, Kk, müssen also einander in einem Punkte O durchschneiden, der von allen gegenüberliegenden Seiten und Kanten des Körpers gleichweit entfernt ist.

311. Polyeder. Denkt man sich eine, von mehreren Ebenen gebildete, Raumfigur ohne das besondere Merkmal zweier congruenten und parallelen Grundflächen oder des Zusammenlaufens der Seiten in einen Punkt, also ein Polyeder, so lassen sich auf ein solches offenbar die, der Pyramide geltenden, Lehrsätze anwenden, wenn man im Innern der Figur irgend einen Punkt annimmt, und von demselben *nach* den Ecken Linien zieht; denn auf diese Weise zerfällt

das Polyeder in eben so viele Pyramiden, als es Seiten hat.

312. Lehrsätze über das Polyeder.

1. Zwei congruente Polyeder können in congruente Pyramiden zerlegt werden.

Denn denkt man sich beide völlig zusammenfallend und einen beliebigen Punkt im Innern mit den Ecken durch gerade Linien verbunden, so entstehen in beiden die nämlichen Pyramiden.

Zusätze. I. Reguläre Polyeder, wenn es deren giebt, zerfallen durch Verbindung ihres Mittelpunkts mit den Ecken (nach 308 L. 10) in reguläre Pyramiden.

II. Nur aus regulären, congruenten Pyramiden lassen sich reguläre Polyeder zusammensetzen.

Denn vorausgesetzt, daß dergleichen, mit ihren Seiten an einander gelegte, Pyramiden am gemeinschaftlichen Punkte A eine Raumecke bilden, wird man dasselbe in Beziehung auf B, C, D .... behaupten dürfen, und hieraus erscheint es wenigstens möglich, daß eine hinreichende Menge congruenter und regulärer Pyramiden sich zu einem Polyeder mit durchaus gleichen Seiten Kanten und Winkeln verbinden könne. Von irregulären Pyramiden das Nämliche behaupten, streitet gegen den Begriff eines regul. Polyeders.

2. Reguläre Polyeder können nur dreierlei Figuren, das gleichseitige Dreieck, das Quadrat oder das reguläre Fünfeck, zu Seitenflächen haben.

Denn denkt man sich eine Ecke von regulären Sechsecken gebildet, deren wenigstens drei zusammenstoßen müssen, so erhält man als Summe der Kantenwinkel $3 . \frac{4}{3} R = 4 R$, welches gegen 308 L. 6 streitet. Noch viel weniger kann also ein regul. Sieben- oder Achteck u. s. w. die Seitenfläche eines regul. Polyeders abgeben.

3. Es kann der regulären Polyeder nicht mehr, als fünf geben.

Denn denkt man sich als Figur der Seitenflächen:

(1) das gleichseitige Dreieck, so läßt sich daraus, weil $3 . \frac{2}{3} R$, $4 . \frac{2}{3} R$ und $5 . \frac{2}{3} R$ sämmtlich weniger, als $4 R$ betragen, eine drei- vier- und fünfseitige Raumecke bilden. Aber $6 . \frac{2}{3} R$ ist $= 4 R$.

(2) Das Quadrat, so kann man, weil $3.R < 4R$, davon drei zu einer R. E. zusammensetzen, jedoch nicht mehrere.

(3) Das reguläre Pentagon, so geben ebenfalls nur drei eine R. E., weil $3.\frac{6}{5}R < 4R$, hingegen $4.\frac{6}{5}R$ schon $> 4R$.

4. Wenn in einem regulären Polyeder die Winkel durch Transversal-Ebenen halbirt werden, so schneiden sich diese in dem nämlichen Punkte.

Denn der gemeinschaftliche Scheitelpunkt aller regul. Pyramiden, in welche (L. 1 Z. I) ein regul. Polyeder zerlegbar sein muß, liegt als Mittelpunkt desselben von den Kanten und Seiten gleichweit entfernt und deshalb nothwendig in allen Transversalebenen, welche die Winkel halbiren.

313. Aufgaben über die Lehrsätze von den ebenflächigen Raumfiguren.

Fig. 97. 1. Aus drei gegebenen Winkelflächen eine Raumecke zu bilden.

Ist dieses (nach 306 L. 12) möglich, so legt man die Winkelflächen BMC, BMD, CME in einer Ebene an einander, und dreht die letzten beiden um MB und MC als Achsen, bis sie in der Linie MA zusammenfallen. Da dieses (wie in Fig. 99. I) auf beiden Seiten von BMC geschehen kann, so lassen sich zwei verschiedene (nach 306 L. 8 symmetrische) Raumecken aus den gegebenen Kantenwinkeln bilden. Daß aber nur diese beiden möglich sind, folgt aus 306 L. 7.

Fig. 102 2. Eine Pyramide zu construiren, wenn deren Basis ABCD.... und zwei benachbarte Seiten MBA, MBC gegeben sind.

Man bilde (nach A. 1) die dreiseit. R. E. (A), so erhält man im gemeinsch. Endpunkte M der beiden Seiten die Spitze der Pyramiede. Augenscheinlich kann aber auf der andern Seite der Basis eine zweite, jener ersten symmetrische, Pyramide construirt werden, so daß die Aufgabe nicht völlig bestimmt ist.

Fig. 104 3. Ein Prisma zu construiren, wenn die Basis ABCD... und zwei benachbarte Seiten gegeben sind.

Die Construction, welche zu zwei verschiedenen Prismen führt (Fig. II und III), wie in A. 2.

4. Ein reguläres Polyeder zu construiren, deſſen Ecken von drei gleichſeitigen Dreiecken gebildet werden. Fig. 106

Man errichte auf dem Mittelp. P eines gleichſeit. Dreiecks A B C die Senkr. P D, und trage von A eine Linie A D = A B auf derſelben ab, ſo ſind (249 L. 1) auch D B u. D C = A B, alſo alle Seiten des Körpers und (nach 306 L. 7) ebenfalls alle Ecken einander gleich. Wegen ſeiner vier Seiten heißt dieſer Körper ein Tetraeder.

5. Ein regul. Polyeder zu conſtruiren, deſſen Ecken von vier gleichſeitigen Dreiecken gebildet werden. Fig. 107

Man conſtruire mit der Dreiecksſeite A B ein Quadrat A B E F, errichte in deſſen Mittelp. P eine Senkrechte und trage zu beiden Seiten eine Länge P C und P D = P A ab, ſo entſtehen durch Verbindung von C und D mit den Ecken des Quadrats über demſelben zwei vierſeit. Pyramiden, deren Seitenflächen (nach 249 L. 1) und deren Winkel (nach 306 L. 1) einander gleich ſind. Beide in Verbindung bilden mithin ein regul. achtſeitiges Polyeder, das ſogenannte Oktaeder.

6. Ein regul. Polyeder zu conſtruiren, deſſen Ecken von fünf gleichſeitigen Dreiecken gebildet werden. Fig. 108

Man conſtruire (nach 270 A. 9) mit einer Dreiecksſeite b c ein regul. Fünfeck b c d e f, errichte in deſſen Mittelp. p eine Senkr. a p, und trage aus b die Länge b c auf derſelben ab, ſo entſteht um a eine R. E. von fünf gleichen Seiten. Denkt man ſich dieſelbe an den Eckpunkten A, D, E eines gleichſeit. Dr. A D E gebildet, ſo entſteht eine zuſammenhängende Oberfläche von zehn regul. Dreiecken. Dieſelbe wird mit einer anderen, ihr gleichen, ſich dergeſtalt zuſammenfügen laſſen, daß die Vereinigungspunkte zweier Seiten (wie B, G, K) an diejenigen von drei Seiten (wie C, F, H) ſtoßen und umgekehrt, wodurch an allen Punkten des Umfangs ebenfalls Raumecken von fünf gleichen Seiten entſtehen müſſen. Auſſer den Seiten werden aber (nach 306 L. 3) auch die Winkel des Körpers ſämmtlich gleich ſein, und da er jener zwanzig beſitzt, bezeichnet man ihn mit dem Namen Ikoſaeder.

7. Ein regul. Polyeder zu conſtruiren, deſſen Ecken von Quadraten gebildet werden. Fig. 109

Man errichte auf den Ecken eines Quadrats A B C D ein Prie-

ma, deſſen Seitenkanten = AB ſind, ſo entſteht ein von ſechs Quadraten unter rechten Winkeln eingeſchloſſener regulärer Körper, das Hexaeder (Cubus, Würfel).

Fig. 110. 8. Ein regul. Polyeder zu conſtruiren, deſſen Ecken von drei regulären Fünfecken gebildet werden.

Man conſtruire ſechs congruente, regul. Fünfecke und lege an die Ecken eines von ihnen, ABCDE, die fünf anderen, ſo daß ſie zu dreien Raumecken bilden. Dadurch entſteht eine zuſammenhängende Oberfläche von ſechs regul. Fünfecken, die man mit einer andern, ihr gleichen, zuſammengelegt und zu einem geſchloſſenen Polyeder vereinigt denken kann, weil mit allen Punkten des Umfangs, wo zwei Seiten an einander ſtoßen (wie F, H, K, M, O) die äußerſten Punkte der andern Figur (wie G, I, L, N, P) und umgekehrt zuſammenfallen, und mit den übrigen congruente, dreiſeitige Raumecken bilden werden. Das auf dieſe Weiſe entſtehende reguläre Polyeder wird von zwölf Seiten eingeſchloſſen und deshalb Dodekaeder genannt.

Drittes Kapitel.

Die krummflächigen Körper.

314. Kegel, Cylinder und Kugel. Die von krummen Oberflächen ganz oder theilweiſe begränzten Raumfiguren oder krummflächigen Körper laſſen ſich in ſolcher Mannigfaltigkeit denken, daß ſie nicht im Allgemeinen, ſondern nur die einfachſten unter ihnen, nämlich die auf die Vorſtellung des Kreiſes zurückführenden, Gegenſtand der elementaren Geometrie ſein können. Durch die Kreisbewegung einer Figur um eine feſte Achſe kann man ſich aber drei Hauptarten krummflächiger Körper erzeugt vorſtellen, jenachdem man ein rechtwinkliges Dreieck, ein Rechteck, oder einen Halbkreis an jene Achſe gelegt und um ſie gedreht denkt. Im erſten Falle entſteht ein pyramidenartiger Körper mit kreisförmiger Baſis, der Kegel (Conus); im zweiten ein prismatiſcher mit zwei parallelen kreisförmigen Grundflächen, der Cylinder; und im dritten Falle ein von krummer und in ſich ſelbſt zurücklaufender

Oberfläche begränzter Körper, die **Kugel**. Wie bei dem Kreise alle Punkte des Umfangs, sind bei der Kugel alle Punkte der Oberfläche von einem liegenden **Mittelpunkte** gleichweit entfernt und folglich alle Durchmesser (deren Endpunkte **Gegenpunkte** der Kugelfläche genannt werden) einander gleich. Die Benennungen von Sehnen, Tangenten, Secanten, Centriwinkel u. s. w. werden vom Kreise auch auf die Kugel übertragen.

315. Lehrsätze über Kegel, Cylinder und Kugel.

1. Der Kegel wird von einer, auf seiner Achse senkrecht stehenden, Ebene in einem Kreise geschnitten. Fig. 111

Denn in welcher Richtung man auch durch die Achse DC zwei Ebenen ADB und GDK legen möge, immer ist wegen Aehnlichkeit der Dreiecke

(1) $cg:CG = cD:CD$. (2) $ca:CA = cD:CD$

folglich (3) $cg:CG = ca:CA$, und da $CG = CA$, auch $cg = ca$, also agb ein Kreis.

Anmerkung. Der durch Drehung eines Trapezes ACca entstehende Körper wird ein abgestumpfter Kegel genannt, weil man von dem vollständigen, durch ACD beschriebenen, Kegel einen kleineren Dagb abgeschnitten denken kann.

2. Der Cylinder wird von einer auf seiner Achse senkrecht stehenden Ebene in einem Kreise geschnitten. Fig. 112

Denn legt man durch die Achse in belieb. Richtung zwei Ebenen AD, GD, so ist $ac = AC$ und $gc = GC$, und da $AC = GC$, auch $ac = gc$, folglich agb eine Kreislinie.

3. Die Kugel wird von einer Ebene stets in einer Kreislinie geschnitten. Fig. 113

Sei adb die schneidende Ebene, und MP aus dem Centrum senkrecht auf sie gefällt, so sind die beiden rechtw. Dr. Mmc und Mmd (nach 249 L. 19) congruent, folglich $mc = md$.

Zusätze. I. Wenn der Durchschnittskreis durch das Centrum der Kugel geht, so sind Radien und Durchmesser beider gleich, und in diesem Falle wird er ein **größter Kugelkreis** in Gegensatz der **kleineren** genannt.

II. Zwei größte Kreise halbiren einander: denn ihr

gemeinsch. Durchschnitt muß durch das Centrum der Kugel gehen und ist mithin ein Durchmesser.

III. Durch zwei beliebige Punkte der Kugeloberfläche kann man einen größten Kreis legen, denn beide bestimmen mit dem Centrum die Lage einer Durchschnittsebene. Sollten sie mit demselben in gerader Linie liegen, wie P, Q, so lassen sich eine unendliche Menge von größten Kreisen, wie PAQ, PDQ, PCQ.... durch sie zu legen.

Fig. 113 4. Jeder größte Kreis ADB theilt die Kugel in zwei congruente Hälften.

Denn wenn man den untern Theil der Kugel um den Durchmesser AB gedreht denkt, bis D in E fällt, so müssen beide Oberflächen in einander fallen, weil sonst die Punkte beider nicht alle vom Centrum gleichweit entfernt sein könnten.

5. Die im Centrum eines größten Kugelkreises ABC errichtete Senkrechte MP trifft die Mittelpunkte aller ihm parallelen Kreise.

Denn sei aeb dem Kreise AEB parallel, so steht Mm auch auf seiner Ebene senkrecht, und es ist am = dm = cm, also m sein Mittelpunkt.

Fig. 113 6. Die Kugelkreise sind um so kleiner, je weiter sie vom Centrum entfernt liegen.

Dieß folgt aus der Größe der Durchmesser nach 258 L. 4.

Fig. 113 7. Wenn man durch den Mittelpunkt eines beliebigen Kugelkreises adb eine Senkrechte zieht, so trifft diese die Kugel in zwei Punkten P und Q, welche von allen Punkten des Kreises gleichweit abstehen und Pole desselben genannt werden.

Denn zieht man die Sehnen Pa, Pd, Pc..., so sind dieselben als Hypotenusen congr. Dreiecke einander gleich, mithin auch die zugehörigen Bogen auf der Oberfläche der Kugel, und a, d, c... gleichweit von P entfernt. Dasselbe gilt in Beziehung auf den andern Pol Q.

Fig. 114 8. Eine durch den Endpunkt eines Kugelradius MA senkrecht zu demselben gelegte Ebene GAF ist Berührungsebene der Kugel.

Denn jeder, in der Ebene GAF außer A liegende Punkt, wie F oder G, liegt weiter vom Centrum C entfernt; also ist allein

A ein der Kugel und Ebene gemeinschaftlicher, d. h. Berührungs-Punkt.

9. Der von zwei größten Kreisen ABK und ACK ein- Fig. 114
geschlossene sphärische Winkel BAC wird von dem zwischen ihnen enthaltenen Bogen DE, wovon A Pol ist, oder auch von dem Tangentenwinkel GAF gemessen.

Denn den Neigungswinkel α beider Kreisebenen bestimmen (nach 300 L. 9) zwei auf MA gezogene Senkrechte MD und ME oder AF und AG, welche diesen Winkel einschließen.

10. Der zwischen zwei größten Kreisen PAQ, PCQ Fig. 114
enthaltene Kugelstreifen verhält sich zu der ganzen Kugeloberfläche, wie der eingeschlossene Bogen AC zum ganzen Kreisumfange ADBEA.

Denn denkt man den ganzen Kreisumfang allgemein in m gleiche Theile getheilt, wovon n den Bogen AC bilden, und durch alle Theilungspunkte und P, Q größte Kreise gelegt, so wird die Kugeloberfläche dadurch in m, der Streifen aber in n congruente kleinere Streifen getheilt. Also verhalten sich beide zu einander, wie $m : n = AC : ADBEA = \alpha : 4R$.

Anmerkung. Legt man durch drei Punkte A, B, C, der Kugeloberfläche, welche nicht in derselben Ebene liegen, größte Kreise, so bilden deren Bogen AB, BC, CA ein sphärisches Dreieck, die Ebenen der Kreise aber am Centrum M der Kugel eine dreiseitige Raumecke; deren Seiten (als Kantenwinkel) von denen des sphärischen Dreiecks (als Bogen) gemessen werden.

316. Lehrsätze über das sphärische Dreieck.

1. In einem gleichschenkl. sphär. Dreiecke liegen gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber; und sind zwei Winkel eines sphär. Dreiecks gleich, so ist es ein gleichschenkliges.

Beweis folgt aus 306 L. 1 und 2.

2. Der größeren Seite eines sphär. Dreiecks liegt der größere Winkel, und dem größeren Winkel die größere Seite gegenüber.

Beweis aus 306 L. 10 und 11.

3. Zwei Seiten eines sphär. Dreiecks zusammengenommen sind stets größer, als die dritte.

Beweis aus 306 L. 12.

Fig. 114 4. Die Summe der Seiten eines sphär. Dreiecks KBC beträgt stets weniger als der Umfang eines größten Kreises.

Denn da BC < AB + AC, so ist auch der Umfang des Dr. KBC < KB + KC + AB + AC, d. i. kleiner, als ein größter Kreis.

Fig. 114 5. Sind in zwei sphär. Dreiecken ABC, KLH zwei Seiten nebst eingeschlossenem Winkel einander gleich, so sind es auch die anderen Winkel nebst der dritten Seite.

Beweis aus 306 L. 5.

Fig. 114 6. Sind in zwei sphär. Dreiecken ABC, KLH eine Seite und die beiden anliegenden Winkel einander gleich, so sind es auch die anderen Seiten nebst dem dritten Winkel.

Beweis aus 306 L. 6.

7. Sind in zwei sphär. Dreiecken drei Seiten einander gleich, so sind es auch die Winkel.

Beweis aus 306 L. 7.

8. Sind in zwei sphär. Dreiecken die Winkel einander gleich, so sind es auch die Seiten.

Beweis aus 306 L. 15.

9. Gränzen zwei sphär. Dreiecke, deren Seiten übereinstimmen, mit einer gleichen Seite an einander gelegt, auch mit den andern gleichen Seiten zusammen, so sind sie symmetrisch; geschieht dieses aber mit den ungleichen Seiten, so sind sie congruent.

Beweis aus 306 L. 8 und 9.

Fig. 115 10. Wenn man aus den Endpunkten des sphär. Dreiecks ABC als Polen mit den Quadranten eines größten Kreises des sphär. Dreiecks PQR construirt, so sind umgekehrt auch P, Q, R Pole der Seiten des Dreiecks ABC.

Denn da der Kreis QR von A und der Kreis QP von C um einen Quadranten entfernt ist, so ist Q ein Pol des Kreises AC. Aus den nämlichen Gründen sind P und R Pole von den Kreisen BC, AB.

Anmerkung. Zwei sphär. Dreiecke dieser Art, worin die Eckpunkte des Einen Pole der gegenüberliegenden Seiten des Andern sind, werden Polardreiecke genannt, und wenn ihre Endpuntt durch Radien mit dem Centrum der Kugel verbunden werden, so entstehen (nach 305) dreiseitige Ergänzungsecken.

11. In einem Polardreiecke PQR sind die Seiten Supplemente von den Winkeln des gegebenen sphär. Dreiecks ABC. Fig. 115

Beweis aus 306 L. 14.

12. Um jedes sphär. Dreieck läßt sich auf der Kegeloberfläche ein Kreis beschreiben.

Denn denkt man sich durch die Eckpunkte des Dr. eine Ebene gelegt, so schneidet dieselbe die Kugel in einem Kreise.

Zusatz. Durch Verbindung der Eckpunkte in zwei seitengleichen sphär. Dreiecken entstehen congruente Sehnen-Dreiecke; folglich sind die um sie beschriebenen Kreise auch congruent.

13. Zwei symmetrische sphär. Dreiecke, ABC, DEF, sind inhaltsgleich. Fig. 116

Denn da die, um beide Dr. construirten, Kugelkreise, folglich auch die gleichschenkl. Dreiecke, welche durch Verbindung der Pole P, Q mit den Ecken entstehen, paarweise congruent sind, so hat man:

$$ABP + BCP - ACP = DEQ + FEQ - DFQ.$$

14. Wenn drei größte Kreise ABK, ACK, CBH einander durchschneiden, so entstehen Vertical-Dreiecke ABC, KLH, welche symmetrisch sind. Fig. 114

Beweis aus 306 L. 16.

Zusätze. I. Werden zwei größte Kreise ABK, ACK von einem dritten CBH geschnitten, so ist die Summe der beiden einander berührenden Dreiecke ABC, HBK dem Streifen BKLH gleich, welcher $\beta = ABC$ zum Winkel hat, indem man Dr. ABC mit KHL vertauschen darf.

II. Der Inhalt der sphär. Dreiecke $ABC + BKH$ verhält sich zur Kugeloberfläche (nach 315 L. 10) wie W. β: 4R.

15. Die Oberfläche eines sphär. Dreiecks verhält sich zu derjenigen der Kugel, wie der Ueberschuß seiner Winkel über zwei rechte, sich zu acht rechten Winkeln verhält.

Sei F die Oberfl. der Kugel, so ist nach Vorigem:

$$(1)\quad ABC + BCK = \frac{\alpha}{4R} \cdot F$$

(2) $ABC + BHK = \frac{\beta}{4R} \cdot F$

(3) $ABC + BAH = \frac{\gamma}{4R} \cdot F$

also $3ABC + (BCK + BHK + BAH) = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{4R} \cdot F.$

Nun ist aber $ABC + BCK + BHK + BAH = \frac{1}{2}F,$

also $2ABC = \left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{4R}\right) F - \frac{1}{2}F,$ oder

$$ABC = F\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma-2R}{8R}\right)$$

Zusätze. I. Zwei sphär. Dreiecke sind inhaltsgleich, wenn die Summe der Winkel in beiden die nämliche ist.

II. Haben zwei sphär. Dreiecke gleichen Flächeninhalt, so ist auch die Summe der Winkel in beiden gleich.

16. Beschreibt man in einem Kugelkreise ein sphär. Viereck ABCD, so sind die Summen der gegenüberliegen- Winkel einander gleich.

Denn zieht man nach dem Pol P des Kreises die Bogen AP, BP, CP, DP, so entstehen vier gleichschenkl. sphär. Dreiecke, worin

$$\alpha = \beta, \quad \alpha' = \delta, \quad \gamma = \beta', \quad \gamma' = \delta'$$

also $(\alpha+\alpha') + (\gamma+\gamma') = (\beta+\beta') + (\delta+\delta')$ oder $A+C = B+D.$

17. Beschreibt man in einem Kugelkreise beliebige sphär. Dreiecke ABC, AEC, die eine gemeinschaftliche Seite AC haben, so ist der Unterschied zwischen den Winkeln an der Spitze und der Summe der Basiswinkel immer der nämliche.

Denn es ist nach L. 16:

(1) $(BAC + BCA) - B = D - (DAC + DCA)$ und
(2) $(EAC + ECA) - E = D - (DAC + DCA)$, also
(3) $(BAC + BCA) - B = (EAC + ECA) - E$

Zusatz. Geht die gemeinsch. Seite AC durch den Pol des Kreises, so ist $\alpha = \beta$, $\gamma = \beta'$, also $\alpha + \gamma = \beta + \beta' = B$ und eben so $CAE + ACE = E$. Sphärische Dreiecke auf derselben Basis, deren Winkel an der Spitze der Summe

der Basiswinkel gleich ist, liegen demnach mit ihrer Spitze im Umfange des nämlichen Kugelkreises.

18. Wenn man durch die Spitze C eines sphär. Dreiecks ABC und die Gegenpunkte D und E einen Kreis ECD legt, so ist jedes andere Dreieck ABF auf der nämlichen Grundlinie, dessen Spitze in diesem Kreise liegt, mit demselben inhaltsgleich. Fig. 118

Denn es ist $\alpha+\delta=\alpha+\alpha'=2R$, und $\beta+\varepsilon=\beta+\beta'=2R$, also $\alpha+\beta+\delta+\varepsilon=4R$ oder $\alpha+\beta+\gamma=4R+\gamma-(\delta+\varepsilon)$. Hieraus folgt, daß wenn man durch C, D, E einen Kreis legt, für dessen sämmtliche Punkte (nach L. 17) $\gamma-(\delta+\varepsilon)$ den nämlichen Werth hat, auch die Winkelsumme $(\alpha+\beta+\gamma)$ des correspondirenden Dreiecks die nämliche bleiben muß, woraus (nach L. 15, Z. 1) auch die Gleichheit des Inhalts aller Dreiecke folgt, die AB zur Basis, und ihre Spitzen im Kreise CDE haben.

Zusatz. Denkt man sich, daß die Seite BC in die Verlängerung von AB falle und mit ihr den Halbkreis ABD bilde, während AC in AGD übergeht, und den Kreis CDE in D berührt, so entsteht der Kugelstreifen AGDB, welcher ebenfalls dem Dreiecke ABC an Inhalt gleich sein muß.

317. Aufgaben über sphärische Dreiecke.

1. Ueber der Grundlinie AB eines sphär. Dreiecks ABC ein gleichschenkliges Dreieck von gleichem Flächeninhalt zu construiren. Fig. 118

Man lege durch die Spitze C des gegebenen Dreiecks und die Gegenpunkte D und E der Endpunkte seiner Basis einen Kreis CDE, und errichte aus der Mitte von AB den senkrechten Bogen KF, so ist (nach L. 18) F die Spitze des gesuchten Dreiecks.

2. Ueber der Grundlinie eines sphär. Dreiecks ABC ein anderes zu construiren, welches gleichen Flächeninhalt und an der Grundlinie 1) einen gegebenen Winkel ABF; oder 2) eine gegebene Seite AF habe. Fig. 118

Man construire den Kreis DEF, wie vorhin, und lege 1) unter dem Winkel BAF einen Bogen an A, oder beschreibe 2) mit AF als sphärischem Radius einen Kreis, so ist F die Spitze des gesuchten Dreiecks.

Fig. 118. 3. Ueber der Grundlinie eines sphär. Dreiecks ABC ein anderes von gleichem Flächeninhalt zu construiren, dessen Spitze in einem gegebenen größten Kreise KFL liege.

Schneiden die Kreise CDE und KFL einander, so geschieht es in zwei Punkten, deren Verbindung mit A und B das gesuchte Dreieck giebt. Schneiden sie einander nicht, so ist die Auflösung unmöglich.

Fig. 118 4. Ein gegebenes sphär. Dreieck ABC in einen Kugelstreifen von gleichem Inhalt zu verwandeln.

Man lege durch CDE einen Kreis und bestimme dessen Pol P, ziehe den Bogen PD, und senkrecht zu demselben in D den Bogen DGA, so ist (nach L. 18 Z.) AGDB der gesuchte Kugelstreifen.

Fig. 119 5. Ein sphär. Dreieck ABC in ein anderes zu verwandeln, welches mit jenem den W. α gemein und einen gegebenen Bogen AD zur Seite habe.

Man verlängere AB zur gegebenen Seite AD, lege durch C und D einen größten Kreis, und construire über CD als Grundlinie (nach A. 3) das Dr. DCE = Dr. DCB, so ist auch Dr. FCE = Dr. FDB, und folglich Dr. ABC = Dr. AED.

6. Ein sphär. Dreieck, welches mit einem gegebenen ABC inhaltsgleich sei und zwei gegebene Seiten enthalte, zu construiren.

Man wende die Auflösungen von A. 2 und β nach einander an.

7. Ein sphär. Dreieck, welches mit einem gegebenen inhaltsgleich sei und eine gegebene Seite nebst einem gegebenen Winkel enthalte, zu construiren.

Geschieht ebenfalls nach A. 2 und 5.

Fig. 119 8. Ein gegebenes sphär. Viereck BCGD in ein sphär. Dreieck zu verwandeln.

Man ziehe eine sphär. Diagonale DC, verlängere den Bogen GC, und construire über CD als Grundlinie (nach A. 3) das Dr. DCE = Dr. DCB, so ist Dr. DGE = BCGD.

Viertes Kapitel.

Die Aehnlichkeit der Körper.

318. **Erklärungen.** Die Bedingungen, unter welchen Figuren einander ähnlich genannt werden, sind für jede beliebige Lage derselben im Raume die nämlichen, wie für Figuren in einer Ebene, nämlich **Convergenz der Verbindungslinien ihrer Ecken und Verhältnißgleichheit der homologen Abschnitte der Convergenten.** Demnach mögen zwei Körper (MABCD, mabcd) ähnlich heißen, wenn bei irgend einer Lage derselben die Verbindungslinien ihrer Ecken (Aa, Bb, Cc, Dd) als Convergenten in dem nämlichen Punkte O zusammentreffen und zugleich die homologen Abschnitte im gleichen Verhältniß stehen (d. h. $\frac{AO}{aO} = \frac{BO}{bO} = \frac{CO}{cO} = \frac{DO}{dO}$). Fig. 120

Der Convergenzpunkt kann eben sowol in einer Ecke oder im Innern der Figur liegen, als ausserhalb. Fallen ähnliche Körper mit einer Ecke in einander, so müssen die einschließenden **Kanten** (als homologe Abschnitte der Convergenten) verhältnißgleich sein.

319. **Lehrsätze von den Convergenten im Raume.**

1. Convergiren die Verbindungslinien der Ecken zwei parallel liegender Figuren im Raume, so sind ihre homologen Abschnitte verhältnißgleich. Fig. 120

Denn die, durch den W. AOB gelegte, Ebene wird (nach 301 L. 5) von denen der Figuren ABCD, abcd in den Parallelen AB, ab, geschnitten, folglich ist AO:aO=BO:bO. Eben so findet man, daß BO:bO=CO:cO, u. s. w.

2. Sind die homologen Abschnitte der Convergenten zweier Figuren, ABCD, abcd, verhältnißgleich, so liegen diese in parallelen Ebenen. Fig. 120

Denn angenommen, eine andere Figur, afgd, sei der ABCD parallel, so wäre (nach L. 1) AO:aO=BO:fO und nach der Voraussetzung AO:aO=BO:bO, was unverträglich ist.

321. Lehrsätze über die Aehnlichkeit der Polyeder.

Fig. 121 **1. Aehnliche Polyeder MO, mO, können in ähnliche dreiseitige Pyramiden zerlegt werden.**

Denn denkt man beide Pol. von Dreiecken eingeschlossen (welches immer gestattet ist, insofern jedes Vieleck aus mehreren Dreiecken in einer Ebene besteht) und dergestalt in einander gelegt, daß zwei homol. Dreiecke ABO, abO, mit gleichem Winkel zusammenfallen, so convergiren der Def. der Aehnl. gemäß alle Verbindungslinien homologer Ecken im Punkte O, der zur gemeinschaftlichen Spitze ähnlicher dreiseitiger Pyramiden wird.

Fig. 121 **2. Aehnliche Polyeder können aus ähnlichen dreiseitigen Pyramiden zusammengesetzt werden, wenn alle homologen Kanten in beiden Pyramidenreihen in dem nämlichen Verhältniß zu einander stehen.**

Sei das Verhältniß aller homol. Kanten in beiden Pyr. Reihen $= m:n$, und denke man die einzelnen Pyr. mit ihren homol. Seiten übereinstimmend an einander gelegt, so werden bei der parall. Lage zwei belieb. homol. Seiten MAB, mab, alle Verbindungslinien der Ecken (nach 319 L. 4 u. 1) convergiren und verhältnißgleich geschnitten, also ähnliche Polyeder gebildet.

3. Die Oberflächen ähnlicher Polyeder verhalten sich zu einander, wie die Quadrate ihrer homologen Kanten.

Denn es ist, wenn $ab:AB = bc:BC = cd:DC\ldots$ (nach 274 L. 5) $abc:ABC = ab^2:AB^2$, $bcd:BCD = bc^2:BC^2$, u. s. w., also (nach 68 L. 11):

$$\left(\frac{abc+bcd+cde\ldots.}{ABC+BCD+CDE\ldots.}\right) = \frac{abc}{ABC} = \frac{ab^2}{AB^2}.$$

4. Alle regulären Polyeder von gleicher Seitenzahl sind einander ähnlich.

Denn da die regul. Polyeder (nach 312) in regul. Pyramiden zerlegt werden können, deren Kanten- und Neigungswinkel (nach 313 A. 4—8) durch die Anzahl ihrer Seiten bestimmt sind, so zerfallen sie (nach 320 L. 3 und 5) in ähnliche dreiseit. Pyramiden, woraus sich wiederum Tedraeder, Oktaeder u. s. f. zusammensetzen lassen, die (nach L. 2) einander ähnlich sind.

322. Lehrsätze über die Aehnlichkeit der krummflächigen Körper.

Der Begriff der Aehnlichkeit läßt sich auch auf Körper mit krummen Oberflächen ausdehnen, obgleich bei denselben nicht von homologen Ecken, sondern nur von homologen Punkten die Rede sein kann. Solche Körper mögen nämlich ähnlich heißen, wenn von ihren Oberflächen alle aus einem bestimmten Punkte O gezogenen Linien in demselben Verhältniß geschnitten werden. Daraus ergeben sich leicht folgende Sätze:

1. Alle Kugeln sind einander ähnlich.

Denn denkt man sie concentrisch gelegt, und beliebige Linien aus der Mitte gezogen, so werden diese von den einzelnen Kugelflächen nach allen Richtungen in dem nämlichen Verhältniß geschnitten.

2. Zwei Cylinder sind ähnlich, wenn ihre Achsen-Durchschnitte (Rechtecke) es sind. Fig. 122

Denn denkt man beide concentrisch in einander liegend und [illegible] Ebene durch die gemeinsch. Achse gelegt, so schneid[illegible] nalen der Durchschnittsrechtecke einander im Centru[illegible] vergenzpunkte und sind wegen der Aehnl. beider R[illegible] nißgleich. Da von allen Linien FG, fg (na[illegible] nämliche gilt, so sind beide Körper ähnlich.

3. Zwei Kegel sind ähnlich, wenn ihre Achsendurchschnitte (Dreiecke) es sind. Fig. 122

Denn mit dem gleichen Winkel an der Spitze O fallen beide Dr. ABO, abO zusammen, wonach jede belieb. Linie OC, aus der Spitze auf die Basis gezogen, verhältnißgleich getheilt wird, und da dieses nach allen Durchschnittsrichtungen geschieht, sind die Kegel einander ähnlich.

323. Lehrsätze über Linien in und an der Kugel.

1. Die Stücke zwei sich schneidender Kugelsehnen Aa, Bb, sind verhältnißgleich. Fig. 123

2. Die Abschnitte zwei, aus einem beliebigen Punkte P gezogener, Kugelsecanten PD, PG sind verhältnißgleich.

3. Die aus einem Punkte P gezogene Kugel-Tangente PC ist mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten jeder beliebigen Secante PD, Pd aus demselben Punkte.

4. Wenn man durch den Berührungspunkt zweier Kugeln Secanten legt, so sind ihre Abschnitte in beiden Kugeln verhältnißgleich.

Die Beweise dieser Sätze folgen, da zwei einander treffende gerade Linien die Lage einer Ebene bestimmen und die Kugel von solcher in einem Kreise geschnitten wird, unmittelbar aus 269.

Fig. 123 5. Wenn man durch einen Punkt C im Innern der Kugel beliebige Linien Aa, Bb, Ee... bis zur Oberfläche zieht, so sind die Producte aus den Abschnitten einer jeden einander gleich.

Denn es ist (nach L. 1) $AO:bO = BO:aO$, $BO:eO = EO:bO$, ... also $AO.aO = BO.bO = EO.eO$...

Fig. 123 6. Wenn man von einem Punkte P außerhalb der Kugel Secanten PD, PG durch dieselbe legt, so sind die Produkte jeder einzelnen und ihres außenliegenden Abschnitts einander gleich.

Denn es ist (nach L. 2) $PF:PG = Pg:Pf$, ... also $PD.Pd = PG.Pg$.....

Fig. 123 7. Alle aus einem beliebigen Punkte gezogenen Kugeltangenten sind einander gleich.

Denn es ist (nach L. 3) $PC^2 = PD.Pd$ und dieses Produkt (nach L. 6) eine beständige Größe.

8. Die Tangenten und die Achse zweier Kugeln sind Convergenten.

Denn denkt man sich durch die Achse zweier Kugeln Ebenen in beliebigen Richtungen gelegt, so erzeugt jeder Durchschnitt zwei Kreise, deren Tangenten (nach 269 L. 5) mit der Achse convergiren.

324. Aufgaben über die Lehrsätze von der Aehnlichkeit der Körper.

Fig. 120 1. An einer gegebenen Kante ab, homolog der AB, ein dem Polyeder ABCD... ähnliches zu construiren.

Man lege ab der AB parallel, ziehe die Convergenten Aa,

Bb, dann aus dem Convergenzp. O die Linien OC, OD... und endlich mit BC, CD... die Parall. bc, cd....

2. Eine Pyramide durch eine, der Basis ABCD paral- Fig 120
lel gelegte Ebene so zu theilen, daß die Durchschnittsfigur abcd zu jener in dem gegebenen Verhältniß m:n stehe.

Man theile (nach 270 A. 7) eine belieb. Seitenkante AO der Pyramide, so daß Oa:OA = √m:√n, weil dann (nach 320 L. 6) abcd:ABCD = Oa²:OA² = m:n.

3. Einen, dem gegebenen ähnlichen, Cylinder zu con- Fig. 122
struiren, so daß die Höhe beider Körper in dem Verhältniß m:n stehn.

Man ziehe in einem Durchschnittsrechteck des Cylinders ABED die Diag. AE, BD, theile die Converg. OB, so daß OB:Ob = m:n, und ziehe die Parall. ba, be, so ist ac Radius und be Höhe des gesuchten Cylinders.

4. Den Convergenzpunkt zwei ähnlicher Körper zu finden.

Man lege die Körper mit den Seiten einer homologen Ecke parallel, oder sind sie krummflächig, mit ihren Achsen, und verbinde die Endpunkte von zwei belieb. homologen Linien.

5. An einen Punkt C auf der Oberfläche einer Kugel eine Berührungslinie zu legen, die zugleich Tangente einer zweiten Kugel sei.

Man lege durch C und die Achsen beider Kugeln eine Ebene, und ziehe in diesen (nach 270 A. 10) die gemeinsch. Berührungslinie.

Fünftes Kapitel.

Die Körperräume.

325. **Körpermaaß.** So wie man zur Angabe des Flächengehalts ebener Figuren sich eines bestimmten Quadrats bedient, wählt man, um den räumlichen Inhalt eines Körpers vermöge gleichartiger Einheiten anzugeben, zum Maaße desselben die Gestalt eines Würfels oder Cubus von gegebener Seite. Wenn auch nicht jeder Körper, gleich einem Parallelepipedon, durch wiederholtes Setzen eines Cubus erzeugt und folglich nicht unmittelbar dadurch gemessen werden kann, so wird er doch einer mittelbaren Ausmessung durch das Cubikmaaß fähig sein, wenn wir seinen räumlichen Inhalt auf eine bestimmte Weise mit dem Inhalt eines geradezu meßbaren vergleichen und dadurch das Verhältniß beider bestimmen können. Ist der räumliche oder sogenannte Cubik-Inhalt des einen uns bekannt, so wird aus den Verhältnißzahlen derjenige des andern sich ergeben, und auf diese Weise die Inhaltsbestimmung der Körper sich immer weiter verfolgen lassen.

326. **Lehrsätze über die Gleichheit der Körper.**

Fig. 124 1. Parallelepipeda über derselben Basis ABCD, deren obere Grundflächen FH, KM, in derselben Ebene und zwischen den nämlichen Parallelen liegen: sind inhaltsgleich.

Denn es sind (nach 310 L. 2) die Prismen AHM und BGL, und nach Abzug beider von dem fünfseitigen Prisma ABGM, die Parpp. ABH und ABM einander gleich.

Fig. 124 2. Parallelepipeda über derselben Basis ABCD, deren obere Grundflächen IKLM, NOPQ in der nämlichen Ebene liegen, sind inhaltsgleich.

Denn verlängert man zwei Seiten der congruenten Parallelogramme IKLM, NOPQ, so bilden sie, einander schneidend, ein drittes, ebenfalls congruentes, EFGH. Es ist aber — (L. 1) Parp. ABM = ABH, und ABH = ABQ, folglich ABM = ABQ.

3. Jedes Parallelepipedon ABQ kann in ein rechtwinkliges von gleicher Basis verwandelt werden. Fig. 124

Zunächst läßt es sich in ein anderes, ABH, verwandeln, das vier senkrechte Kanten, also vier Rechtecke zu Seiten hat. Verlängert man in demselben nun die Linie CD, um AN, BK senkrecht darauf zu fällen, und construirt über dem Rechteck ABKN ein Parp. ABLM, so sind die Parpp. ABGH, ABLM, also auch ABOQ (Fig. 124) und ABLM (Fig. 125) inhaltsgleich. Fig. 125

4. Die beiden Prismen, worin ein Parallelepipedon ABH durch eine Diagonalebene BFHD zerlegt wird, sind inhaltsgleich. Fig. 126

Man lege durch eine Kante BF zwei senkrechte Ebenen und verlängere die Seiten des Prisma, so entstehen die congr. und parall. Figuren BLMK, FOPN, und das rechtw. Parp. KBLP. Da nun (308 L. 3) die Pyr. BAKMD und FENPH congruent sind, so folgt, daß ABH = KBP, und eben so, daß BCH = BLP. Es ist aber (nach 310 L. 2) KBP = BLP, folglich auch ABH = BCH.

5. Eine dreiseitige Pyramide kann in zwei inhaltsgleiche Prismen und zwei gleiche Pyramiden zerlegt werden. Fig. 127

Denn legt man durch die Mitte E einer Kante PB zwei Ebenen mit den gegenüberliegenden Seiten parallel, so entstehen die congruenten Dreiecke DEF, GBH, und DPF, GEH, welche mit den ebenfalls congr. Dreiecken PDE, EGB und PEF, EGH gleiche Pyramiden einschließen. Legt man ferner mit der Grundfl. GC eine congruente EL parallel durch EF, und construirt das Parp. GL, so kann dasselbe (L. 4) sowol durch EHCF als auch durch IHKF in Hälften getheilt werden. Nun ist (310 L. 2) das Prisma GID = HCF, und da dieses = $\frac{1}{2}$GL, auch GID = GEC.

6. Ein dreiseitiges Prisma kann in drei Pyramiden zerlegt werden, wovon die eine mit jeder andern gleiche Basis und Höhe hat. Fig. 128

Denn wird das Prisma durch die Ebenen BCD, BFD geschnitten, so hat (1) BDEF mit DABC gleiche Basis und, wegen der Parallelflächen auch gleiche Höhe; (2) DBEF mit DBCF gleiche Basis und, wegen der gemeinsch. Spitze, auch gleiche Höhe.

327. Lehrsätze über das Verhältniß der Körperräume.

Fig. 129 **1. Rechtwinklige Parallelepipeda von gleicher Basis verhalten sich, wie ihre Höhen.**

Denn denkt man sich eine Seitenkante AE in m gleiche Theile (Einheiten) getheilt und der Basis parallele Ebenen durch alle Theilungspunkte gelegt, so wird (nach 310 L. 2) das Parp. AG dadurch in m congruente kleinere zerlegt. Besteht nun AK aus n Theilen von AE, so enthält das Parp. AL auch n Theile von AG, oder es verhält sich $AL:AG = n:m = AK:AE$.

Aber auch wenn das Verh. AK:AE nicht in ganzen Zahlen auszudrücken wäre, bleibt diese Proportion gültig. Denn angenommen, es wäre

(1) $AL:AG = AM:AE$, u. als Linieneinheit würde eine Länge $KP < KM$ gewählt, so hätte man

(2) $AO:AG = AP:AE$, und ferner aus beiden

(3) $AL:AO = AM:AP$, welches unmöglich ist. Da aus denselben Gründen nicht $AL:AG = AN:AE$ sein kann, so folgt ganz allgemein, daß $AL:AG = AK:AE$.

Fig. 130 **2. Rechtwinklige Parallelepipeda DF, DQ derselben Höhe verhalten sich, wie ihre Grundflächen.**

Denn legt man beide Körper mit einer Kante DH so an einander, daß deren anliegende Seiten in dieselben Ebenen fallen, und erweitert die übrigen Seiten, so bilden dieselben ein drittes Parp HL, und es ist (L. 1):

(1) $EC:HL = EH:HI$; (2) $HL:PM = HG:PH$

also $EC:PM = EH.HG:HI.PH = EHGF:PHIQ$.

Fig. 130 **3. Rechtwinklige Parallelepipeda RM, EC verhalten sich überhaupt zu einander, wie die Producte aus ihren Grundflächen und Höhen.**

Denn werden beide Körper wie vorhin an einander gelegt und die Seiten zu dem Parp. HL erweitert, so hat man

(nach L. 1) $RM:PM = DS:DH$

(nach L. 2) $PM:EC = RSTU:EFGH$

also $RM:EC = RSTU.DS:EFGH.DH$.

Zusatz. Da die Grundflächen als Producte der Seiten (Länge und Breite) angesehen werden können, so verhalten

rechtwinkl. Parallelepipeda ſich auch, wie die Producte ihrer drei Dimenſionen.

328. Lehrſätze über die Inhaltsbeſtimmung der Körper.

1. Den Inhalt eines Parallelepipedons P findet man durch Multiplication ſeiner Grundfläche B mit der Höhe H. Fig. 125

Denn jedes beliebige Parp. P iſt (326 L. 3) einem rechtwinkligen von inhaltsgleicher Baſis B und derſelben Höhe H gleich. Es verhält ſich aber, wenn C den meſſenden Cubus bezeichnet, deſſen Seite = c ſei (327 L. 3), P : C = B . H : c^2 . c, und wenn C als Körper-, ſo wie c als Linien-Einheit angenommen wird, P = B . H.

2. Der körperliche Inhalt eines beliebigen Prisma's wird durch Multiplication ſeiner Grundfläche B mit ſeiner Höhe H gefunden. Fig. 126

Denn jedes vielſeitige Prisma kann in eben ſo viele dreiſeitige Prismen, als ſeine Baſis B in Dreiecke zerlegt werden. Jedes ſolches Prisma mit der Baſis b darf man aber (326 L. 4 als Hälfte eines Parp. von doppelter Baſis (2b) betrachten, alſo = b . H ſetzen, und da die Summe der Baſisdreiecke = B u. die gemeinſch. Höhe = H iſt, ſo folgt, daß P = B . H.

3. Den Inhalt einer dreiſeitigen Pyramide Q findet man durch Multiplication ihrer Grundfläche B mit dem dritten Theile der Höhe H. Fig. 127

Denn da der Inhalt einer dreiſ. Pyr. Q nothwendig von Baſis und Höhe beſtimmt wird, aber (nach 326 L. 6) nur ein Theil von demjenigen eines Prisma P derſelben Baſis und Höhe ſein kann, ſo darf man Q = P . f ſetzen, unter f einen beſtimmten ächten Bruch verſtehend. Nun iſt, weil EFD = $\frac{1}{4}$B und MN = NP = $\frac{1}{2}$H, wenn die Pyr. (nach 326 L. 5) in zwei gleiche kleinere u. zwei Prismen zerlegt wird:

$$Q = P.f = B.H.f = 2\left(\frac{B}{4}\cdot\frac{H}{2}\right) + 2\left(\frac{B}{4}\cdot\frac{H}{2}\right)f$$

$$= \left(\frac{B.H}{4}\right)(1+f)$$

alſo $f = \frac{1}{4}(1+f)$ oder $f = \frac{1}{3}$, und $Q = \frac{1}{3}B.H.$

Zuſatz. Jedes dreiſeitige Prisma kann (nach 326 L. 6) in drei inhaltsgleiche Pyramiden zerlegt werden.

Fig. 102 4. Der Inhalt jeder vielseitigen Pyramide Q wird durch Multiplication ihrer Basis mit dem dritten Theile der Höhe gefunden.

Denn zerlegt man Q durch Diagonalebenen in dreiseitige Pyramiden, deren Grundflächen = A, B, C, ... so haben alle die nämliche Höhe und es ist $Q = \frac{1}{3}H(A+B+C\ldots) = \frac{1}{3}.BH$.

Zusätze. I. Jede Pyramide ist der dritte Theil eines Parallelepipedons von gleicher Basis und Höhe.

II. Zwei Pyr. von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen, und wenn ihre Basis gleich ist, wie ihre Höhen.

III. Aehnliche Pyramiden, Q, q, verhalten sich, wie die Cubi ihrer Höhen oder homologen Kanten, weil $Q:q = \frac{1}{3}B.H : \frac{1}{3}b.h$, und da (nach 320 L. 6) $B:b = H^2:h^2$, auch $= H^3:h^3$, woraus auch $Q:q = PA^3:PD^3 = AB^3:DE^3 \ldots$ folgt.

Fig. 128 5. Den Inhalt einer abgestumpften Pyramide R findet man durch Multiplication ihrer Höhe mit der Summe beider Grundflächen (G^2 und g^2) und der mittlern Proportionale zwischen beiden.

Denn es ist nach L. 4 (1) $R = \frac{1}{3}(G^2.H - g^2.h)$, und ferner (nach 320 L. 6) $G^2:g^2 = H^2:h^2$ oder $G:g = H:h$, woraus sich (2) $H = \frac{G}{g}h$ und (3) $\frac{H-h}{G-g} = \frac{h}{g}$ ergiebt. Durch Substitution dieser Werthe erhält man

$$(4)\ R = \tfrac{1}{3}.\frac{h}{g}(G^3 - g^3) = \tfrac{1}{3}\left(\frac{H-h}{G-g}\right)(G^3 - g^3)$$
$$= \frac{H-h}{3}(G^2 + Gg + g^2).$$

6. Den Inhalt eines regulären Polyeders S findet man durch Multiplication der Oberfläche O mit dem dritten Theile des Radius H der eingeschriebenen Kugel.

Denn fällt man auf jede Seite F des n seitigen Polyeders aus seinem Centrum eine Senkrechte H, so ist (nach L. 4) $s = \frac{1}{3}.nF.H = \frac{1}{3}O.H$.

Zu[illegible] Derselbe Satz gilt aus den nämlichen Grün[illegible] de[illegible] um eine Kugel beschriebene, irreguläre P[illegible]

329. Lehrsätze über die Bestimmung der Oberfläche und des Inhalts der krummflächigen Körper.

1. Den Inhalt eines Cylinders C findet man durch Multiplication seiner Basis B mit seiner Höhe H.

Sei $C = x.H$, unter x die unbekannte Fläche verstanden, die mit des Cyl. Höhe multiplicirt werden muß, um seinen Inhalt zu geben, und denkt man sich in und um den Cylinder die regul. Prismen P, p construirt, deren Grundflächen G, g um und in den Basiskreis beschriebene Polygone sind, so ist $C \prec P$ und $\succ p$, d. h. $\prec G.H$ und $\succ g.H$. Nun gibt es aber keine Fläche, welche unter allen belieb. Annahmen für P und p kleiner, als G und größer, als g wäre, als den Kreis B; folglich ist $x = B$ und $C = B.H$.

2. Die krumme Oberfläche O eines Cylinders wird durch Multiplication des Basisumfanges U mit der Höhe H gefunden.

Sei $O = x.H$ und denkt man sich unter P, p die Oberflächen regulärer, um und in den Cylinder beschriebener Prismen, deren Perimeter $= L, l$ so ist $O \prec P$ und $\succ p$, d. h. $\prec L.H$ und $\succ l.H$. Nun ist aber der Kreisumfang U unter allen Umständen $\prec L$ und $\succ l$, folglich $U = x$ und $O = U.H$.

3. Den Inhalt eines Kegels K findet man durch Multiplication seiner Basis B mit dem dritten Theile der Höhe H.

Denn vergleicht man den Kegel mit zwei Pyramiden Q, q, die gleiche Höhe H, aber ein, in oder um den Basiskreis beschriebenes Polygon, G oder g, zur Grundfläche haben, so ist $K \prec Q$ und $\succ q$, d. h. $\prec \frac{1}{3}G.H$ und $\succ \frac{1}{3}g.H$. Sei nun $K = x.H$, so muß $x = B$ sein, weil allein $B \prec G$ und $\succ g$ ist.

4. Den Inhalt eines abgestumpften Kegels R findet man durch Multiplication des dritten Theils der Höhe mit der Summe der beiden Grundflächen G^2, g^2 und der mittleren Proportionale zwischen beiden.

Der Beweis ist ganz, wie in 328 L. 5.

5. Die krumme Oberfläche O eines Kegels findet man durch Multiplication seines Basisumfangs U mit der Hälfte der Seitenhöhe N.

Bezeichnen Q, q die Oberflächen zweier regul. Pyramiden,

deren Grundflächen mit den Perimetern L, l um und in den Baſiskreis beſchrieben worden, ſo iſt $O < Q$ und $> q$, d. h. $< \frac{1}{2} L.M$ und $> \frac{1}{2} l.m$, unter M, m die Seitenhöhen der Pyramidendreiecke verſtanden. Nun iſt aber unter allen Umſtänden $U < L$ und $> l$, und zugleich $N < M$ und $> m$, folglich $O = \frac{1}{2} U.N$.

6. Die krumme Oberfläche O eines abgeſtumpften Kegels wird durch Multiplication der halben Summe beider Baſis-Umringe U, u mit der Seitenhöhe gefunden.

Denn es iſt (nach L. 5) (1) $O = \frac{1}{2}(U.S - u.s)$, und da (265 L. 3) $U:u = S:s$, alſo (2) $S = \frac{U}{u} s$ u. (3) $\frac{S-s}{U-u} = \frac{s}{u}$, ſo hat man (4) $O = \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{u}(U^2 - u^2) = \frac{1}{2}\left(\frac{S-s}{U-u}\right)(U^2 - u^2)$ $= \frac{1}{2}(S-s)(U+u)$.

Fig. 131 Zuſatz. Die Oberfläche O iſt der eines Cylinders gleich, deſſen Durchmeſſer $= RQ$ und deſſen Höhe $= GK$ iſt.

Fig. 132 7. Die gekrümmte Oberfläche eines Körpers, welcher durch Umdrehung eines regulären Polygons ABCGF um ſeine Achſe AF erzeugt wird, findet man durch Multiplication dieſer Achſe mit dem Umfange des eingeſchriebenen Kreiſes.

Denn zieht man aus dem Centrum auf die Mitte einer Seite BC den Radius MN, und aus B, N und C die Senkrechten BL, NP, CM, BO, ſo iſt wegen Aehnlichkeit der Dreiecke: (1) $BC:BO = MN:NP$, und wenn $\mathfrak{P}(r)$ die Peripherie eines Kreiſes bezeichnet, deſſen Radius $= r$; (2) $BC:BO = \mathfrak{P}(MN):\mathfrak{P}(NP)$ oder (3) $BC.\mathfrak{P}(NP) = BO.\mathfrak{P}(MN)$.

Hiernach findet man $BC.\mathfrak{P}(NP)$ d. i. nach L. 6 den Inhalt des abgeſt. Kegels, welchen BMLC beſchreibt, durch Multiplication ſeiner Höhe BO mit dem Umfange des eingeſchr. Kreiſes; folglich den Inhalt des ganzen, aus ſolchen Kegelſtücken beſtehenden, Körpers durch Multiplication der Summe $(AL + LM + MK + KF)$ d. i. ſeiner Achſe mit jenem Kreisumfange.

Zuſätze. I. Iſt das Polygon von gerader Seitenzahl, und die Verbindungslinie zweier Ecken, CE, zur Achſe gewählt, ſo giebt das Product $CE.\mathfrak{P}(MC)$ die ganze Oberfläche des Körpers.

II. Wählt man hingegen die Verbindungslinie zweier Seiten, AF, zur Achſe, ſo giebt $AF.\mathfrak{P}(AM)$ nur

den gekrümmten Theil der Oberfläche, welcher für alle, um den nämlichen Kreis construirten, Polygone, wie groß auch immer die Anzahl ihrer Seiten sein mag, dasselbe betragen muß. Um die ganze Oberfläche zu erhalten, müßte man noch die beiden kreisförmigen Endflächen zu AF. $\mathfrak{P}$(AM) addiren.

8. Die Oberfläche der Kugel findet man durch Multiplication ihres Durchmessers mit dem Umfange eines größten Kreises. Fig. 132

Denn denkt man sich um einen größten Kugelkreis ANF regulâre Polygone von gerader Seitenzahl beschrieben, und um eine gemeinsch. Achse AF gedreht, so entstehen gekrümmte Oberflächen, welche nach dem vorstehenden Zusatze um so weniger von einander verschieden sein werden, je kleiner die Endflächen in A und F sind. Die Gränze aller solcher Polygone ist aber der eingeschr. Kreis, und die von ihm erzeugte Kugelfläche, wofür diese Endflächen verschwinden, wird gleich jeder andern, von QBCGS beschriebenen, Oberfläche ausgedrückt durch AF. $\mathfrak{P}$(AM).

Zusätze. I. Die Oberfläche der Kugel ist das Vierfache ihres größten Kreises, weil AF. $\mathfrak{P}$(AM) = 2AM. $2AM\pi = 4AM^2.\pi$.

II. Die Oberfläche der Kugel ist (L. 2) derjenigen eines umschriebenen Cylinders gleich. Fig. 131

III. Die Oberfläche eines sphärischen Dreiecks ist (316 L. 15) $D = \left(\frac{\alpha+\beta+\gamma-2R}{2R}\right) AM^2.\pi$.

9. Die Oberfläche einer Kugelzone Z findet man durch Multiplication ihrer Höhe mit dem Umfange eines größten Kreises. Fig. 133

Denn denkt man um den Bogen AB, durch dessen Drehung um CN die Kugelzone Z erzeugt werden mag, das Stück BQPRA irgend eines berührenden Polygons construirt, so erzeugt dasselbe (nach L. 7) eine Oberfläche = FG. $\mathfrak{P}$(CN), wie groß auch die Anzahl der Seiten sein mag. Da nun der Bogen AB die Gränze aller möglichen Polygonstücke BQ...A ist, so muß ebenfalls Z = FG. $\mathfrak{P}$(CN) sein.

Zusatz. Zonen von verschiedener Höhe auf derselben Kugel verhalten sich, wie die Höhen, zu einander.

10. Den Inhalt einer Kugel K findet man durch Multiplication ihrer Oberfläche O mit dem dritten Theile des Radius AM.

Denn denkt man sich um die Kugel irgend ein berührendes Polyeder construirt, dessen Oberfläche $= Q$, so ist sein Inhalt (328 L. 6. Z.) $= \frac{1}{3} Q . AM$, wie groß immerhin die Anzahl der einschließenden Seiten angenommen werde. Da nun die Kugeloberfläche O die Gränze aller möglichen berührenden Polyederflächen ist, so muß auch $K = \frac{1}{3} O . AM$ oder $\frac{4}{3} AM^2 . \pi . AM = \frac{4}{3} AM^3 . \pi$ sein.

Fig. 131 Zusätze. I. Zwei Kugeln verhalten sich, wie die Cubi ihrer Radien.

II. Der Inhalt einer Kugel beträgt das Doppelte von dem eines Kegels, welcher ihren größten Kreis zur Basis hat, weil $K = \frac{4}{3} AM^2 . \pi = 2(AM^2 . \pi) \left(\frac{2AM}{3}\right)$. Da nun (L. 3) ein Cylinder derselben Basis u. Höhe das dreifache des Kegels beträgt, so verhalten sich Kegel, Kugel und Cylinder, wie 1:2:3.

11. Den Inhalt eines Kugelsectors k, dessen Basis ein sphärisches Dreieck D ist, findet man durch Multiplication seines Flächeninhalts mit dem dritten Theile des Radius.

Sei der Inhalt von $k = \frac{1}{3} AM . x$, so kann man auf die nämliche Weise, wie in 314 L. 10 u. 315 L. 15 für Kugelstreifen u. sphär. Dreiecke auch für Kugelsectoren die Verhältnisse $\alpha : 4R$ und $(\alpha + \beta + \gamma - 2R) : 8R$ folgern. Demnach verhalten sich die Kugelsectoren, deren Grundflächen sphärische Dreiecke sind, wie diese selbst, mithin:

$$k : K = \frac{1}{3} AM . x : \frac{1}{3} AM . O = D : O,$$

woraus sich $x = D$ ergibt.

Zusatz. Da ein Kugelsector, dessen Basis ein sphärisches Polygon P ist, sich in dreiseitige Sectoren zerlegen läßt, so findet man seinen Inhalt ebenfalls $= \frac{1}{3} AM . P$.

12. Den Inhalt eines Kugelsectors k mit kreisförmiger Basis B findet man durch Multiplication derselben mit dem dritten Theile des Radius.

Denn bezeichnen p und P (als in und um B beschriebene sphär. Polygone) die Grundflächen zweier Kugelsectoren s, S, so

ist $k < S$ und $> s$, d. h. $< \frac{1}{3} AM.P$ und $> \frac{1}{3} AM.p$. Da nun B stets $< P$ und $> p$, so kann auch k nur $= \frac{1}{3} AM.B$ sein.

330. **Aufgaben über die Bestimmung der Oberflächen und des Inhalts der Körper.**

1. Die Oberfläche O eines regulären sechsseitigen Prisma zu finden, dessen größter Durchmesser $= 2r$, und dessen Höhe $= h$ ist.

Die beiden Grundflächen betragen $3r^2\sqrt{3}$ und die sechs Seitenflächen $6.r.h$, also die ganze Oberfläche $O = 3r(r\sqrt{3} + 2h)$.

2. Die Oberfläche O einer regulären sechsseitigen Pyramide zu finden, deren Basis-Durchmesser $= 2r$, und deren Höhe $= h$ ist. Fig. 102

Die Grundfläche $= \frac{3}{2}.r^2\sqrt{3}$ und jede Seitenfläche $= \frac{1}{2} r\sqrt{(r^2+h^2)}$ also $O = 3r.\left(\frac{1}{2} r.\sqrt{3} + \sqrt{(r^2+h^2)}\right)$.

3. Die Oberfläche O eines Kugel-Segments MNF zu finden, wenn dessen Höhe $FG = h$ und der Radius der Kugel $CF = r$ gesetzt wird. Fig. 135

Die gekrümmte Oberfläche ist (329 L. 9) $= 2r.\pi.h$, der Durchschnittskreis des Segments $= (2rh - h^2).\pi$, also $O = (4rh - h^2)\pi$

4. Die Oberfläche eines Kugelsectors MCNF zu finden, wenn dessen Durchschnittssehne $MN = s$ und der Radius der Kugel $CN = r$ gesetzt wird. Fig. 135

Die sphärische Oberfläche des Kugelsectors ist (329 L. 9) $= s.\pi.r.\sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}s^2)}$, und die conische (L. 5) $= s.\pi.\frac{1}{2}r$, also $O = r.s.\pi.\frac{1}{2} + \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}s^2)}$.

5. Den Inhalt eines Tetraeders T zu finden, wenn eine Kante AB desselben gegeben ist. Fig. 106

Da (nach 267 L. 4) $AP = \frac{2}{3} AQ$ und $AQ = \sqrt{AB^2 - BQ^2}$, so hat man $AP = \frac{2}{3}\sqrt{AB^2 - \frac{1}{4}AB^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} AB$, und daraus die Höhe:

$DP = \sqrt{AD^2 - AP^2} = \sqrt{AB^2 - \frac{1}{3}AB^2} = AB.\sqrt{\frac{2}{3}}$, folglich

$T = ABC.\frac{1}{3}DP = (AB^2.\sqrt{\frac{3}{16}})(\frac{1}{3}.AB.\sqrt{\frac{2}{3}}) = \frac{1}{6}AB^3.\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Fig. 107 6. Den Inhalt eines Oktaeders O zu finden, wenn eine Kante AB deſſelben gegeben iſt.

Aus $AB^2 = AP^2 + BP^2 = 2BP^2$, oder $BP = AB\sqrt{\frac{1}{2}}$, folgt, daß das halbe Oktaeder, $\frac{1}{2}O = ACED \cdot \frac{1}{3}BP = AB^2(\frac{1}{3}AB\sqrt{\frac{1}{2}})$ alſo $O = AB^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}$ iſt.

4. I. 7. Den Inhalt eines Körpers zu finden, welcher durch Drehung des Dreiecks ABC um eine, durch ſeine Spitze C beliebig gezogenen Linie, CD, erzeugt wird.

Verlängert man AB und CD bis zum Durchſchneiden und zieht die Senkrechten AF, BG, ſo iſt (nach 329 L. 3) der durch Rotation von CAD entſtandene Körper: Rot. $(CAD) = \frac{1}{3}(AF^2 \cdot \pi)CD$. Eben ſo iſt Rot. $(CBD) = \frac{1}{3}(BG^2 \cdot \pi)CD$, folglich Rot. $(CAB) = \frac{1}{3}\pi(AF^2 - BG^2)CD$.

Wird aus dem Halbirungspunkte H der Seite AB die Linie HG ſenkrecht auf CD, und BK ſenkrecht auf AF gezogen, ſo hat man:

$AF^2 - BG^2 = (AF + BG)(AF - BG) = 2.EH.AK$;

folglich Rot. $(CAB) = \frac{2}{3}\pi.EH.AK.CD$. Verlängert man endlich noch DA, und fällt die Senkrechte CL, ſo iſt

$AK : AB = CL : CD$ oder $AK.CD = AB.CL = 2.ABC$,

mithin Rot. $(CAB) = \frac{2}{3}EH.2\pi.ABC$; d. h. der Inhalt des durch Rotation von CAB erzeugten Körpers wird gefunden, indem man den Flächenraum des Dreiecks mit $\frac{2}{3}$ des, von dem Punkte H beſchriebenen, Kreisumfangs multiplicirt.

Fig. 134 II. Zuſatz. Iſt das Dreieck ein gleichſchenkliges, alſo $CB = CA$, ſo hat man $ABC = \frac{1}{2}AB.CH$, alſo Rot. $(CAB) = \frac{2}{3}EH.\pi.AB.CH$; und da $CH : HE = AB : BK$, oder $CH.BK = HE.AB$ iſt; Rot. $(CAB) = \frac{2}{3}CH^2.BK.\pi = \frac{1}{3}CH^2.GF.\pi$.

Fig. 133 8. Den Inhalt eines Körpers zu finden, der durch Umdrehung des Kreisſectors ABC um die Achſe CD erzeugt wird.

Der durch Rotation des Kreisſectors BCN erzeugte Kugelſector iſt (229 L. 12) das Product aus der vom Bogen BAN beſchriebenen Kugelzone und $\frac{1}{2}AC$, d. i. (229 L. 9) $S = \frac{2}{3}AC^2.\pi.NG$. Eben ſo findet man den durch Umdrehung des Kreisſectors ACN

entstehenden Kugelsector $s = \frac{2}{3} AC^2 . \pi . NF$; folglich $S - s$ oder Rot. $(ACB) = \frac{2}{3} AC^2 . \pi . FG$.

9. Den Inhalt eines Körpers zu finden, der durch Umdrehung des Kreissegments ABP um die Achse CD erzeugt wird.

Nach A. 3, 3. ist Rot. $(ABC) = \frac{2}{3} CH^2 . EF . \pi$, und nach A. 4 Rot. $(APBC) = \frac{2}{3} AC^2 . FE . \pi$; folglich der durch Umdrehung des Kreissegments ABP erzeugte Körper $= \frac{2}{3} FE . \pi (AC^2 - CH^2) = \frac{2}{3} FE . \pi . \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{1}{6} . FE . AB^2 . \pi$.

10. Den Inhalt eines Körpers zu finden, welcher entsteht, wenn man von einem Cylinder ABLK das Kugelsegment ABNM abzieht. Fig. 135

Man findet nach A. 4 den Inhalt des durch Umdrehung des Kreissectors ACM beschriebenen Körpers $= \frac{2}{3} AC^2 . \pi . CG$, und den des Kegels $MCN = \frac{1}{3} GN^2 . \pi . CG$ folglich den Inhalt des Kugelsegments $ABNM = (\frac{2}{3} AC^2 + \frac{1}{3} GN^2) GC . \pi$. Wird dieser Werth nun von dem des Cylinders $ABLK = AC^2 . \pi . GC$ abgezogen, so erhält man Rot. $(AMK) = (\frac{1}{3} AC^2 . \pi - \frac{1}{3} GN^2 . \pi) GC = \frac{1}{3} (GC^2 . \pi) GC = \frac{1}{3} (GP^2 . \pi) GC$; d. i. der Inhalt des Kegels OCP, welcher durch Umdrehung der Linie CD entsteht.

Sechstes Kapitel.

Die sphärische Trigonometrie.

331. Gegenstand der sphär. Trig. Den Lehrsätzen über die gegenseitige Abhängigkeit der Seiten und Winkel eines sphär. Dreiecks (316) gemäß findet unter diesen Bestandtheilen ein eben so bestimmter Zusammenhang, wie unter den Seiten und Winkeln des geradlinigen Dreiecks Statt, und da jeder sphär. Winkel durch denjenigen zweier Tangenten der Kugel, die Seiten des sphär. Dreiecks aber durch die Winkel, welche zwei Radien derselben am Centrum bilden, gemessen werden, so lassen sich die Begriffe, Bezeichnungen und Formeln, welche nur für geradlinige Winkel aufgestellt und abgeleitet wurden, auch auf sphärische Winkel und Seiten übertragen. Es ist nun das Geschäft der sphär. Trigonometrie, den Zusammenhang unter diesen Bestandtheilen eines sphär. Dreiecks, welcher geometrisch nur im Allgemeinen ausgesprochen werden konnte, arithmetich vermöge der goniometrischen Functionen (als Zahlenwerthen) in bestimmten Formeln darzustellen, in welchen jede einzelne Größe durch die übrigen bestimmt wird. Man hat es dabei allein mit Winkelgrößen zu thun, da die Seiten hier nicht in Hinsicht auf ihre Länge, sondern nur als winkelmessende Kreisbogen betrachtet werden, als deren Radius immer die Einheit gilt.

332. Trig. Lehrsätze für rechtwinkl. sphär. Dreiecke.

Fig. 136 Wenn man die Eckpunkte A, B, C eines rechtwinkligen sphär. Dreiecks mit dem Kugelmittelpunkte M durch gerade Linien zu einer dreiseit. Raumecke verbindet, aus A auf die Kanten MB, MC die Senkrechten AD, AE, und die auf AM senkrecht stehenden Tangenten AF, AG, nebst den Verbindungslinien DE, FG zieht; so entstehen die rechtwinkligen, geradlinigen Dreiecke AMD, AME, AMF, AMG; DME, FMG, ADE, AFG; (die Ebenen AFG, MFG stehne beide senkrecht auf AFM, also auch ihr Durchschnitt

FG). Durch Anwendung der trig. Sätze (291) erhält man für den Zusammenhang der Seiten und Winkel im rechtwinkl. sphär. Dreiecke ABC, die eben so, wie die des geradlinigen Dreiecks ABC, durch a, b, c; α, β, γ; bezeichnet werden mögen, folgende Lehrsätze.

1. Der Sinus der Hypotenuse ist dem Sinus einer Ca- Fig. 136
thete, dividirt durch den Sinus des gegenüberliegenden Winkels, gleich. $\left(\text{sin. b} = \frac{\text{sin. c}}{\text{sin. }\gamma}\right)$.

Denn es ist AD = AM. sin. AMD = AE. sin. AED, und AE = AM. sin. AME.

2. Der Cosinus der Hypotenuse ist dem Producte der Fig. 136
Cosinus beider Catheten gleich. (cos. b = cos. a. cos. c).

Denn es ist EM = AM. cos. AME = MD. cos. DME, und MD = AM. cos. AMD.

3. Der Cosinus eines Winkels ist der Tangente der an- Fig. 136
liegenden Cathete, dividirt durch die Tangente der Hypotenuse, gleich. $\left(\text{cos. } \alpha = \frac{\text{tg. c}}{\text{tg. b}}\right)$.

Denn es ist AF = AM. tg. AMF = AG. cos. FAG, und AG = AM. tg. AMG.

4. Der Sinus einer Cathete ist der Tangente der andern Fig. 136
Cathete, dividirt durch die Tangente des dieser gegenüberliegenden Winkels, gleich. $\left(\text{sin. c} = \frac{\text{tg. a}}{\text{tg. }\alpha}\right)$.

Denn es ist FG = FM. tg. FMG = AF. tg. FAG, und $\text{FM} = \text{AM. sec. c} = \frac{\text{AM}}{\text{cos. c}}$

$\text{AF} = \text{AM. tg. c} = \text{AM.} \frac{\text{sin. c}}{\text{cos. c}}$.

5. Der Cosinus der Hypotenuse ist dem Producte der Fig. 136
Cotangenten beider anliegenden Winkel gleich. (cos. b = cot. α. cot. γ).

Denn es ist AD = DE. tg. AED = AM. sin. AMF, und DE = EM. tg. DME; also cos. b. tg. a. tg. γ = sin. c, u. wenn man aus L. 4 $\text{sin. c} = \frac{\text{tg. a}}{\text{tg. }\alpha}$ einführt: cos. b. tg. α. tg. γ = 1.

Fig. 136 6. Der Sinus eines Winkels ist dem Cosinus der anliegenden Cathete, dividirt durch den Cosinus des ihr gegenüberliegenden Winkels, gleich. $\left(\text{sin. } \gamma = \frac{\text{cos. } \alpha}{\text{cos. a}}\right)$.

Denn es ist AD = AF. sin. AFD = AE. sin. AED, und AF = AG. cos. FAG; AE = AM. sin. AME. Also hat man

tg. b . cos. α . cos. c = sin. b . sin. γ oder cos. α . $\frac{\text{cos. c}}{\text{cos. b}}$ = sin. γ, worin nach L. 2 $\frac{\text{cos. c}}{\text{cos. b}} = \frac{1}{\text{cos. a}}$ gesetzt werden muß.

333. Allgem. trigon. Lehrsätze für sphärische Dreiecke.

Fig. 136 1. Es verhalten sich die Sinus zweier Seiten zu einander, wie die Sinus der ihnen gegenüberliegenden Winkel.

Denn fällt man aus einem Winkelpunkte C den senkrechten Bogen CI auf die gegenüberliegende Seite c, so ist (nach 332 L. 1) sin. CI = sin. b . sin. α = sin. a . sin. β, oder:

(1) sin. b : sin. a = sin. β : sin. α.

Fig. 136 2. Der Cosinus einer beliebigen Seite ist dem Producte der Cosinus der beiden andern nebst demjenigen der Sinus dieser Seiten in dem Cosinus des gegenüberliegenden Winkels gleich.

Denn verlängert man die Kanten MB, MC der Raumecke und zieht die Tangenten AF, AG nebst der Verbindungslinie FG, so entstehen die geradlinien Dreiecke AFG, MFG, worin in Beziehung auf AM als Einheit:

AF = tg. c, AG = tg. b, MF = sec. c, MG = sec. b.

Folglich FG^2 = sec. b^2 + sec. c^2 − 2 sec. b . sec. c. cos. a

und auch FG^2 = tg. b^2 + tg. c^2 − 2 tg. b . tg. c . cos. a

und hieraus, indem man $\text{sec.}^2 - \text{tg.}^2 = 1$ setzen darf:

1 + tg. b . tg. c . cos. α = sec. b . sec. c . cos. a

oder wenn man $\text{tg.} = \frac{\text{sin.}}{\text{cos.}}$ und $\text{sec.} = \frac{1}{\text{cos.}}$ setzt:

(2) cos. a = cos. b . cos. c + sin. b . sin. c . cos. α.

Fig. 136 3. Das Product der Cotangente einer beliebigen Seite in dem Sinus einer zweiten ist gleich dem Producte aus deren [illegible] den Cosinus des, von beiden eingeschlossenen,

Winkels nebst demjenigen aus dem Sinus dieses Winkels in die Cotangente dessen, welcher der ersten Seite gegenüber liegt.

Denn es ist nach (1) $\sin. b = \frac{\sin. a \cdot \sin. B}{\sin. A}$, und nach (2)

$\cos. b = \cos. a \cdot \cos. c + \sin. a \sin. c \cdot \cos. \beta.$

Wenn man diese beiden Werthe in die Gleichung (2) im L. 2 substituirt, so wird sie $\cos. a = \cos. a \cdot \cos. c^2 + \sin. a. \sin c. \cos. c \cdot \cos. \beta + \left(\frac{\sin. a \cdot \sin. \beta}{\sin. \alpha}\right) \sin. c \cdot \cos. \alpha$ b. i. zusammengezogen:

$\cos. a (1 - \cos. c^2) = \sin. a \cdot \sin. c (\cos. c \cdot \cos. \beta + \sin. \beta \cdot \cot. \alpha)$

oder

(3) $\cot. a \cdot \sin. c = \cos. c \cdot \cos. \beta + \sin. \beta \cdot \cot. \alpha.$

4. Der Cosinus eines beliebigen Winkels ist gleich dem Producte aus den Sinus der beiden andern Winkel in den Cosinus der gegenüberliegenden Seite weniger dem Producte der Cosinus jener beiden Winkel.

Denkt man (nach 316 L. 10 u. 11) zu dem gegebenen sphär. Dreiecke ABC das Polardreieck PQR construirt, so ist $a = (2R - \alpha)$, $b = (2R - \beta)$, $c = (2R - \gamma)$, und wenn diese Werthe in (1) substituirt werden:

(4) $\cos. \alpha = \sin. \beta \cdot \sin. \gamma \cdot \cos. a - \cos. \beta \cdot \cos. \gamma.$

334. Umformung der sphär. trig. Grundformeln.

Von den vorstehenden vier Grundformeln der sphärischen Trigonometrie ist für die logarithmische Berechnung nur die erste unmittelbar zu gebrauchen. Die drei anderen müssen zu diesem Zwecke erst dergestalt umgeformt werden, daß ihre Zweitheiligkeit verschwinde, und nur Factoren oder Divisoren in ihnen vorkommen. Jenachdem nun die eine oder andere Größe durch die übrigen bestimmt werden soll, muß dieselbe Formel auf verschiedene Art umgestaltet werden. Man wendet dazu entweder einige bekannte goniometrische Formeln oder einen sogenannten Hülfswinkel an wie aus Folgendem hervorgeht.

1) Zur Bestimmung eines Winkels durch die drei Seiten.

Wenn man zu beiden Seiten der Gleichung (1) unter der Form

$$\cos. \alpha = \frac{\cos. a - \cos. b. \cos. c}{\sin. b. \sin. c}$$

die Einheit addirt, und die Formel $\cos.(b+c) = \cos. b. \cos. c - \sin. b. \sin. c.$ anwendet, so findet man:

$$1 + \cos. \alpha = \frac{\cos. a - \cos.(b+c)}{\sin. b. \sin. c}.$$

Nun ist aber nach 287:

$\cos. \alpha = 2 \cos. \frac{1}{2} \alpha^2 - 1$, od. $1 + \cos. \alpha = 2 \cos. \frac{1}{2} \alpha^2$ (18)

$\cos. a - \cos. m = 2 \sin. \frac{1}{2}(m+a). \sin. \frac{1}{2}(m-a)$ . . . . . (21)

und wenn diese Werthe substituirt werden:

$$\text{I. (A)} \quad \cos. \tfrac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{\sin. \frac{1}{2}(b+c+a). \sin. \frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin. b. \sin. c}}$$

Zieht man hingegen, um den Winkel α durch die Function des Sinus zu bestimmen, beide Seiten der Gleichung von der Einheit ab, und wendet die Formel $\cos.(b-c) = \cos. b. \cos. c + \sin. b. \sin. c$ an, so erhält man:

$$1 - \cos. \alpha = \frac{\cos.(b-c) - \cos. a}{\sin. b. \sin. c}$$

Nun ist nach 287:

$\cos. \alpha = 1 - 2 \sin. \frac{1}{2} \alpha^2$, oder $1 - \cos. \alpha = 2 \sin. \frac{1}{2} \alpha^2$ (18)

$\cos. m - \cos. a = 2 \sin. \frac{1}{2}(a+m). \sin. \frac{1}{2}(a-m)$ . . . (21)

und nach Substitution dieser Werthe:

$$\text{I. (B)} \quad \sin. \tfrac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{\sin. \frac{1}{2}(a+b-c) \sin. \frac{1}{2}(a-b+c)}{\sin. b. \sin. c}}.$$

2) Zur Bestimmung einer Seite durch die beiden andern und den gegenüberliegenden Winkel.

Man setze, um die Formel $m. \cos.(b-\varphi) = m.(\cos. b. \cos. \varphi + \sin. b. \sin. \varphi)$, auf die Gleichung (1) $\cos. a = \cos. b. \cos. c + \sin. b. \sin. c. \cos. \alpha$ anzuwenden, $\cos. c = m. \cos. \varphi$ und $\sin. c. \cos. \alpha = m. \sin. \varphi$. Dadurch wird sie:

$$\cos. a = m. \cos.(b-\varphi)$$

und wenn $m = \frac{\cos. c}{\cos. \varphi}$ substituirt wird, zur Gleichung:

$$\text{II.} \quad \cos. \alpha = \frac{\cos. c}{\cos. \varphi} \cos. (b - \varphi),$$

für deren Anwendung der Hülfswinkel φ nach dem Ausdrucke $tg. \varphi = \frac{m. \sin. \varphi}{m. \cos. \varphi} = tg. c. \cos. \alpha$ vermittelst der Function der Tangente berechnet werden muß.

3) Zur Bestimmung einer Seite durch die beiden andern und einem anliegenden Winkel.

Durch Transposition folgt aus II:

$$\text{III.} \quad \cos. (b - \varphi) = \frac{\cos. \alpha. \cos. \varphi}{\cos. c}, \text{ wenn } tg. \varphi = tg. c. \cos. \alpha$$

4) Zur Bestimmung eines Winkels durch beide anliegende Seiten und einen zweiten Winkel.

Benutzt man die Formel $m. \sin. (\beta + \varphi) = m. (\sin. \beta. \cos. \varphi + \sin. \varphi \cos. \beta)$ zur Umgestaltung von (3) $\cot. a. \sin. c. = \cos. c. \cos. \beta + \sin. \beta. \cot. \alpha$, indem man $\cos. c = m. \sin. \varphi$ und $\cot. \alpha = m. \cos. \varphi$ setzt, so wird:

$$\cot. a. \sin c = m. \sin. (\beta + \varphi)$$

und nach Substitution von $\frac{\cos. c}{\sin. \varphi}$ für m:

$$\cot. a. \sin. c = \frac{\cos c}{\sin. \varphi} \sin. (\beta + \varphi), \text{ oder}$$

$$\text{IV.} \quad \sin. (\beta + \varphi) = \frac{tg. c}{tg. a} \sin. \varphi; \text{ wenn } tg. \varphi = \cos. c. tg. \alpha.$$

5) Zur Bestimmung einer Seite durch beide anliegende Winkel und eine zweite Seite.

Durch Anwendung der Formel $m. \sin. (c - \varphi) = m (\sin. c. \cos. \varphi - \sin. \varphi \cos. c)$ auf die Gleichung (3) unter der Gestalt

$$\sin. \beta. \cot. \alpha = \sin. c. \cot. a - \cos. c. \cos. \beta.$$

erhält man, $\cot. a = m. \cos. \varphi$ und $\cos. \beta = m. \sin. \varphi$ setzend:

$$\sin. \beta. \cot. \alpha = m. \sin. (c - \varphi)$$

und wenn $m = \frac{\cos.\beta}{\sin.\varphi}$ ſubſtituirt wird:

$$\sin.\beta.\cot.\alpha = \frac{\cos.\beta}{\sin.\varphi}.\sin.(c-\varphi), \text{ oder}$$

V. $\sin.(c-\varphi) = \frac{\text{tg.}\beta}{\text{tg.}\alpha}.\sin.\varphi$; wenn $\text{tg.}\varphi = \cos.\beta.\text{tg.}\alpha$.

6) Zur Beſtimmung eines Winkels durch die beiden andern und die gegenüberliegende Seite.

Die Gleichung (4) $\cos.\alpha = \sin.\beta.\sin.\gamma.\cos.\alpha - \cos.\beta.\cos.\gamma$ wird, wenn man die Formel $m.\sin.(\beta-\varphi) = m(\sin.\beta\cos.\varphi - \sin.\varphi\cos.\beta)$ gebraucht, und $\sin.\gamma.\cos.\alpha = m.\cos.\varphi$, $\cos.\gamma = m.\sin.\varphi$ ſetzt:

$$\cos.\alpha = m.\sin.(\beta-\varphi)$$

und wenn man $m = \frac{\cos.\gamma}{\sin.\varphi}$ ſubſtituirt:

VI. $\cos.\alpha = \frac{\cos.\gamma}{\sin.\varphi}.\sin.(\beta-\varphi)$; wenn $\text{tg.}\varphi = \frac{\cot.\gamma}{\cos.\alpha}$.

7) Zur Beſtimmung eines Winkels durch die beiden andern und eine anliegende Seite.

Durch Transpoſition der Gleichung VI erhält man

VII. $\sin.(\beta-\varphi) = \frac{\sin.\varphi.\cos.\alpha}{\cos.\gamma}$; wenn $\text{tg.}\varphi = \frac{\cot.\gamma}{\cos.\alpha}$.

8) Zur Beſtimmung einer Seite durch die drei Winkel.

Wenn man beide Seiten der Gleichung (4) unter der Form

$$\cos.\alpha = \frac{\cos.\alpha + \cos.\beta.\cos.\gamma}{\sin.\beta.\sin.\gamma}$$

zur Einheit addirt, und $\cos.(\beta-\gamma) = \cos.\beta.\cos.\gamma + \sin.\beta.\sin.\gamma$ anwendet, ſo erhält man:

$$1 + \cos.\alpha = \frac{\cos.(\beta-\gamma) + \cos.\alpha}{\sin.\beta.\sin.\gamma}$$

Nun iſt aber nach 287:

$\cos.\alpha = 2\cos.\frac{1}{2}\alpha^2 - 1$ od. $1 + \cos.\alpha = 2\cos.\frac{1}{2}\alpha^2$ . . (18)

$\cos.m + \cos.\alpha = 2\cos.\frac{1}{2}(\alpha+m).\cos.\frac{1}{2}(\alpha-m)$. (22)

und wenn diese Werthe substituirt werden:

$$\text{VIII. (A)} \quad \cos.\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\cos.\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)\cos.\frac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma)}{\sin.\beta.\sin.\gamma}}$$

Zieht man hingegen, um a durch die Function des Sinus zu erhalten, beide Seiten der Gleichung von 1 ab, so ist mit Anwendung der Formel $\cos.(\beta+\gamma) = \cos.\beta.\cos.\gamma - \sin.\beta.\sin.\gamma$:

$$1 - \cos.a = \frac{-(\cos.(\beta+\gamma)+\cos.\alpha)}{\sin.\beta.\sin.\gamma}$$

und wenn man die Formeln (18) und (22) aus 287 anwendet:

$$\text{VIII. (B)} \quad \sin.\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\cos.\frac{1}{2}(\beta+\gamma+\alpha).\cos.\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)}{\sin.\beta.\sin.\gamma.}}$$

335. Aufgaben der sphärischen Trigonometrie.

1. Die Catheten eines rechtwinkligen sphär. Dreiecks ABC zu finden, wenn dessen Hypotenuse nebst einem anliegenden Winkel gegeben ist.

Sei $b = 50°\,44'$ und $\gamma = 46°\,58'$, so ist (nach 332 L. 1):

$$\log.\sin.c = \begin{cases} \log.\sin.b = 9.88886 \\ +\ \text{l.}\sin.\gamma = 9.86389 \end{cases}$$
$$9.75275 = \text{l.}\sin.34°28'.$$

Ferner hat man (nach 332 L. 3):

$$\log.\operatorname{tg}.a = \begin{cases} \log.\operatorname{tg}.b = 10.08750 \\ +\text{l.}\cos.\gamma = 9.83405 \end{cases}$$
$$9.92155 = \text{l.}\operatorname{tg}.39°51'.$$

2. Aus den, der Hypotenuse eines rechtwinkl. sphär. Dreiecks ABC anliegenden Winkeln α, γ die Seiten desselben zu berechnen.

Sei $\alpha = 153°\,26'$, $\gamma = 105°\,28'$, so ist, indem man die Logarithmen der negativen Cosinus u. Cotangenten durch ein angehängtes n bezeichnet, um aus der geraden oder ungeraden Anzahl der negativen Factoren und Divisoren auf die Art des gesuchten Winkels zu schließen, (nach 332 L. 5):

$$\log.\cos. b = \begin{cases} \log.\cot. a = 10.30100.n \\ +\text{l.cot.}\,\gamma = 9.44200.n \end{cases}$$
$$9.74300 = \text{l. cos. } 56°24'.$$

Ferner erhält man (nach 332 L. 6):

1) $$\log.\cos. a = \begin{cases} \log.\cos. a = 9.95154.n \\ -\text{l.sin.}\,\gamma = 9.98399 \end{cases}$$
$$9.96755.n = \text{l. cos. } 111°53'.$$

2) $$\log.\cos. c = \begin{cases} \log.\cos.\gamma = 9.42599.n \\ -\text{l. sin.}\, a = 9.65054 \end{cases}$$
$$9.77545.n = \text{l. cos. } 126°36'$$

Die Richtigkeit der Rechnung kann man leicht nach 332 L. 2 prüfen.

3. Den Winkel γ eines sphär. Dreiecks zu berechnen, dessen drei Seiten gegeben sind.

Sei $a = 34°16'52''$, $b = 46°20'40''$, $c = 26°32'18''$, so ist (334, I. B)

$$\log.\sin.\tfrac{1}{2}\gamma \begin{cases} \log.\sin.\tfrac{1}{2}(c+b-a) = 9.5192084 \\ +\text{l. sin. }\tfrac{1}{2}(c-b+a) = 9.1003102 \\ \qquad + 8.6195186 \\ -\log.\sin. a = 9.8594403 \\ -\log\sin. b = 9.7507040 \\ \qquad - 9.6101443 \\ \qquad 9.0093743 \\ \qquad :2 \\ \qquad 9.5046871 \end{cases}$$
$$= \text{l. sin. } 18°38'32''.$$

4. Aus zwei Seiten a, b eines sphär. Dreiecks und dem eingeschlossenen Winkel die dritte Seite zu berechnen.

Sei $a = 34°16'52''$, $b = 46°20'40''$, $\gamma = 37°17'4''$, so ist (334. II)

$$\log. \text{tg. } \varphi = \begin{cases} \log. \text{tg. } a = 9.8335747 \\ +\text{l.cos. }\gamma = 9.9007155 \end{cases}$$
$$9.7342902 = \text{l. ang. } 28°28'25''.$$

$$\log.\cos. c = \begin{cases} \log.\cos. a = 9.9171294 \\ +\text{l.cos}(b-\varphi) = 9.9785232 \\ \hline 9.8956526 \\ -\text{ l. cos. } \varphi = 9.9440071 \\ \hline 9.9516455 = \text{l. cos.} \\ 26^\circ 32' 18''. \end{cases}$$

5. Aus zwei Seiten a, c eines sphär. Dreiecks und dem eingeschlossenen Winkel β einen der beiden anderen Winkel und die dritte Seite zu berechnen.

Sei $a = 73^\circ 58' 54''$, $c = 38^\circ 45'$, $\beta = 46^\circ 33' 41''$, so ist (334. V):

$$\log.\text{ tg. } \varphi = \begin{cases} \log.\cos.\beta = 9.8373223 \\ +\text{l. tg. a} = 10.5419795 \\ \hline 10.3793018 = \text{l. tang.} \\ 67^\circ 20' 15''. \end{cases}$$

$$\log.\text{ tg. } \alpha = \begin{cases} \log.\text{ tang. } \beta = 10.0236820 \\ +\text{l. sin. } \varphi = 9.9650920 \\ \hline 19.9887740 \\ -\text{l.sin.}(c-\varphi) = 9.6798823.n \\ \hline 10.3088917.n = \text{l. tg.} \\ 116^\circ 9' 8''. \end{cases}$$

Um die dritte Seite zu berechnen, wähle man nun die Formel aus 333 L. 1:

$$\log.\text{ sin. b} = \begin{cases} \log.\text{ sin. a} = 9.9828011 \\ +\text{l. sin. } \beta = 9.8610033 \\ \hline 9.8438044 \\ -\text{ l. sin. } \alpha = 9.9531100 \\ \hline 9.8906944 = \text{l. sin.} \\ 51^\circ 1' 52'' \end{cases}$$

6. Der Winkel β eines sphär. Dreiecks ABC werde durch beide anliegende Seiten a, c und einen zweiten Winkel α bestimmt.

Sei $a = 88^\circ 50'$, $c = 58^\circ 26'$, $\alpha = 75^\circ 46'$ so ist (334. IV):

$$\log.\text{ tg. } \varphi = \begin{cases} \log.\cos. c = 9.7189086 \\ +\text{l. tg. } \alpha = 10.5957514 \\ \hline 10.3146600 = \text{l. tg } 64^\circ 9'. \end{cases}$$

$$\log.\sin.(\beta+\varphi) = \begin{cases} \log.\operatorname{tg}.c = 10.2115471 \\ +\,\text{l.}\sin.\varphi = 9.9542129 \\ \hline 10.1657600 \\ -\,\text{l.}\quad a = 11.6911158 \\ \hline 8.4746442 = \text{l.}\sin. 1^\circ 42' 30''. \end{cases}$$

Da aber diesem Logarithmus auch der stumpfe Winkel $178^\circ\ 17'\ 30''$ entspricht und $\varphi = 64^\circ\ 9'$ abgezogen werden soll, um β zu gewinnen, so setze man $\beta + \varphi = 178^\circ\ 17'\ 30''$, woraus $\beta = 114^\circ\ 8'\ 30''$ folgt.

7. Es werde ein Winkel α des sphär. Dreiecks ABC bestimmt, wenn die beiden anderen nebst der gegenüberliegenden Seite a gegeben sind.

Sei $\beta = 94^\circ\ 30'$, $\gamma = 96^\circ\ 20'$, $a = 100^\circ\ 16'$, so ist (334. VI):

$$\log.\operatorname{tg}.\varphi = \begin{cases} \log.\operatorname{cot}.\gamma = 9.04528.n \\ -\,\text{l.}\quad a = 9.25098.n \\ \hline 9.79430 = \text{l.}\operatorname{tg}. 31^\circ 54'. \end{cases}$$

$$\log.\cos.\alpha = \begin{cases} \log.\cos.\gamma = 9.04262.n \\ +\,\text{l.}\sin(\beta-\varphi) = 9.94832 \\ \hline 9.99094.n \\ -\,\text{l.}\sin.\varphi = 9.72299 \\ \hline 9.26795.n = \text{l.}\cos. 100^\circ 40'. \end{cases}$$

8. Aus den drei gegebenen Winkeln eines sphär. Dreiecks ABC soll eine Seite a bestimmt werden.

Sei $\alpha = 100^\circ\ 40'$, $\beta = 94^\circ\ 30'$, $\gamma = 96^\circ\ 20'$, so ist (334. VIII):

$$\log.\sin.\tfrac{1}{2}a = \begin{cases} \log.(-\cos.\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma+\alpha)) = 9.91729 \\ +\,\text{l.}\cos.\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha) = 9.84885 \\ \hline +9.76614 \\ -\log.\sin.\beta = 9.99734 \\ -\log.\sin.\gamma = 9.99866 \\ \hline -9.99600 \\ \hline 9.77014^6 \\ :2 \\ \hline 9.88507 \\ = \text{l.}\sin. 50^\circ 8'. \end{cases}$$

Drittes Buch.

Die höhere Geometrie.

336. Krumme Linien und Flächen. Den Betrachtungen der elementaren Geometrie der Ebene und des Raumes lag faſt durchgängig die urſprüngliche Vorſtellung von gerader Linie und ebener Fläche zum Grunde. Von den unzähligen krummen Linien, welche die Einbildungskraft erzeugen kann, wurde als die einfachſte und regelmäßigſte nach Begriff und Form nur die Kreislinie aufgenommen, und auch die Betrachtungen über ſie oder die von ihr erzeugten Oberflächen konnten jener Grundvorſtellungen von gerader Linie und ebener Fläche nicht entbehren. Dagegen wurden die krummen Linien oder Curven im Allgemeinen wegen der Unbeſtimmtheit ihres Begriffs, (als nicht gerade Linien) und eben ſo die gekrümmten Flächen (als Nicht-Ebenen) von jenen Betrachtungen ausgeſchloſſen und eigenthümlichen ſpäteren Unterſuchungen vorbehalten, die man unter dem Namen der höheren Geometrie jenen elementaren gegenüberſtellen kann.

337. Beziehungslinien. Die Beziehung auf eine gerade Linie, welche ſchon im negativen Begriffe der Curve liegt, findet nothwendig auch in der Darſtellung derſelben ſtatt, inſofern eine deutliche Vorſtellung ihrer eigenthümlichen Geſtalt nur dadurch gewonnen werden kann, daß man die ſtetige Aenderung durch den veränderlichen Abſtand ihrer einzelnen Punkte von einer gegebenen Geraden bemerklich macht. Dieſe Beſtimmungsart der Richtung und Lage vermöge des veränderlichen Abſtandes von einer gegebenen geraden Beziehungslinie iſt eben ſowol auf gerade, als auf krumme Linien, alſo ganz allgemein, anwendbar und enthält die Grundanſicht der höheren Geometrie. Ihr gemäß kann man eine Curve auch dadurch als

entstehend sich vorstellen, daß auf einer geraden Linie eine andere veränderliche (gewissermaßen fließende) bald zu- bald abnehmende in immer paralleler Lage sich fortbewege, wobei ihr Endpunkt einen zusammenhangenden Zug bilden muß.

338. Beziehungsebene. Auf eine ähnliche Weise wird jede krumme Fläche, wie in ihrem Begriffe, so auch in der Darstellung auf eine Ebene bezogen, indem man sie durch Angabe des veränderlichen Abstandes ihrer Punkte von derselben zu bestimmen sucht. Offenbar kann diese Methode der räumlichen Bestimmung nicht minder auf ebene, als auf krumme Flächen angewendet werden und ist wegen dieser Allgemeinheit für die höhere Geometrie ein Mittel, jede Lage, Gestalt und Krümmung einer Fläche anzugeben.

339. Analytische Geometrie. Der Begriff von veränderlichen Größen — die eigentliche Grundlage für die Betrachtungsweise der höheren Geometrie — fordert zur Unterscheidung von der Vorstellung constanter oder unveränderlicher Größen, wofür man schon in der elementaren Geometrie die Bezeichnung durch Buchstaben zu gebrauchen pflegt, eine eigenthümliche Andeutung. Man hat dazu die letzten Buchstaben des Alphabets gewählt, die also hier nicht (wie in der Algebra) das Unbekannte, sondern das Veränderliche bezeichnen, während die übrigen das Räumlich-Unveränderliche arithmetisch darstellen. Diese Darstellungsart bringt Arithmetik und Geometrie in die engste Verbindung, indem sie uns gestattet, aus dem Zusammenhange der Zeichen auf derjenigen der durch sie dargestellten Raumformen und die Eigenschaften der krummen Linien und Flächen, worauf sie sich beziehen, zu schließen. Die hieraus hervorgehende analytische Betrachtungsweise erklärt den Namen analytische Geometrie, womit die allgemeine Untersuchung der Curven und krummen Flächen ebenfalls belegt zu werden pflegt.

Erstes Kapitel.

Die geraden Linien und Winkel.

340. Coordinaten. Um die Lage irgend eines Punktes M in der Ebene MFm zu bestimmen, denke man willkührlich die gerade FX gezogen, nehme einen beliebigen Punkt A in derselben an und fälle die Senkrechte MP auf AX. Diese Linie heißt dann Ordinate, das von ihr abgeschnittene Stück AP Abscisse des Punktes M, und beide Linien bestimmen seine Lage in Beziehung auf die gewählte Linie AX und den Anfangspunkt A. Insofern man noch unzählige andere Punkte M', M''... durch Ordinaten auf FX bezogen denken kann; giebt man dieser gemeinschaftlichen Beziehungslinie den Namen Abscissenachse und versteht unter Ordinatenachse eine senkrecht durch den Anfangspunkt gezogene AB. Die Linien, wodurch nach dieser Vorstellung die Lage beliebiger Punkte der Ebene YAX bestimmt wird, bezeichnet man, als paarweise zusammengehörend, auch mit dem gemeinschaftlichen Namen Coordinaten und hat es als ganz gleichgültig und der Willkühr überlassen anzusehen, auf welche der beiden Achsen als die Abscissenachse der gegebene Punkt M zu beziehen sei, ob auf AY durch die Ordinate MB oder auf AX durch die Ordinate MP, weil in beiden Fällen die Lage des Punktes durch Coordinaten der nämlichen Länge bestimmt wird, und der ganze Unterschied in der Verwechselung des Namens besteht. Fig. 137

Obgleich die Wahl rechtwinkliger Coordinaten ihre Vorzüge hat, so ist sie doch keineswegs nothwendig, sondern ebensowol die Anwendung don Coordinaten zulässig, die einander unter schiefen Winkeln treffen. So kann z. B. M sowol durch MF als durch MP auf die Abscissenachse AX bezogen werden, wenn man AN als Ordinatenachse annimmt.

341. Bezeichnung der Lage. Man gebraucht zur Andeutung der Coordinaten, als veränderlicher, einer stetigen Zu- oder Abnahme fähiger Größen die Buchstaben

x und y, durch x die Abſciſſen, durch y die Ordinaten bezeichnend: ſo iſt MP = y, AP = x. Um aber neben dem Zahlenwerthe auch die Lage der Coordinaten bemerklich zu machen, muß man die für Abſciſſen und Ordinaten als urſprünglich angenommene Richtung als poſitiv, die ihr entgegengeſetzte als negativ anſehen und dem gemäß durch + und — bezeichnen. Rechnet man z. B. anfangs die Abſciſſen von A nach X, die Ordinaten von A nach Y, ſo iſt
Fig. 137 AF = — x und AC = — y.

Für den Anfangspunkt A iſt augenſcheinlich x = o und y = o, für alle in der Achſe der x liegenden Punkte y = o, und für ſämmtliche Punkte der Ordinatenachſe x = o. Jeder andere, nicht in die Achſen fallende Punkt hat nothwendig zwei reelle Coordinaten, deren Richtung durch das poſitive oder negative Vorzeichen beſtimmt wird. So hat man:

für M' { AP' = + x' ; M'P' = + y' } für m' { AP' = + x' ; m'P' = — y' }

M'' { AP'' = — x'' ; M''P'' = + y'' } für m'' { AP'' = — x'' ; m''P'' = — y'' }

Anmerkung. Man muß ſich hüten, dieſe Zeichen der Lage mit den Zeichen des Addirens und Subtrahirens zu verwechſeln und auf die Länge der Linie zu übertragen. So iſt z. B. der Ausdruck für die Länge der Linie P'P'' nicht = x' — x'', ſondern x' + x''.

342. Gleichung der geraden Linie. Durch die Fällung von (rechtwinkl. oder ſchiefwinkl.) Ordinaten aus beliebigen Punkten N, N', ... einer, durch den Anfangspunkt A gezogenen, geraden Linie entſtehen die ähnlichen
Fig. 137 Dreiecke NAP, N'AP' ..., worin die Ordinaten zu den Abſciſſen in einem, ſich immer gleich bleibenden (conſtanten) Verhältniſſe ſtehen, deſſen Zahlenwerth durch a bezeichnet werden mag; alſo

$$\frac{y}{x} = \frac{y'}{x'} = \frac{y''}{x''} \ldots\ldots\ldots = a.$$

Der allgemeine, d. h. für alle Punkte der Geraden AN gültige, Zuſammenhang ihrer Coordinaten iſt alſo ausgeſprochen durch die Gleichung

$$\frac{y}{x} = a \quad \text{oder} \quad y = ax,$$

welche man als arithmetische Darstellung einer geraden Linie betrachten kann, indem man den unbestimmten Größen x und y die Bedeutung veränderlicher Coordinaten ertheilt. Daß diese gerade Linie durch deren Anfangspunkt gehen müsse, erkennt man aus dem gleichzeitigen Nullwerden von x und y.

Werde nun aber allgemeiner die Lage FM für die gerade Linie angenommen, so findet man, wenn DE mit AX parallel gezogen und AD = b gesetzt wird:

$$\frac{MN}{ND} = \frac{M'K}{KD} \ldots = \frac{NP}{AP},$$

$$\text{oder} \quad \frac{y-b}{x} = \frac{y'-b}{x'} \ldots = a$$

$$\text{und daraus} \quad y = ax + b$$

als die allgemeinste Gleichung einer geraden Linie, welche nicht durch den Anfangspunkt der Coordinaten gelegt ist.

343. Ausdruck des Winkels. Man kann bekanntlich jeden spitzen Winkel im rechtwinkligen Dreieck vermöge der Catheten in Function seiner Tangente ausdrücken, und diese Bestimmungsart, angewendet auf den Winkel α, welchen eine gerade Linie AN oder FM mit der Abscissenachse einschließt, giebt: Fig. 137

$$\text{tang.}\,\alpha = \frac{MP}{FP} = \frac{NP}{AP} = \frac{y-b}{x} = a.$$

Dieser Zahlenwerth, der Coefficient von x in der Gleichung $y = ax + b$, ist also jederzeit Tangente des gesuchten Winkels. Das Verhältniß NP : AP gestattet offenbar die mannigfaltigsten, gebrochenen und ganzen Werthe von o bis in's Unendliche (∞). Der Annahme, daß $a = \text{tg.}\,\alpha = o$, entspricht die parallele, der Voraussetzung, daß $a = \text{tg.}\,\alpha = \infty$, die senkrechte Lage der MF.

Wird die Linie MF auf schiefwinklige Coordinatenachsen bezogen oder W. YAX allgemein $= \beta$ angenommen, so hat man in dem schiefwinklichten Dreiecke FMP, worin W. $FMP = \beta - \alpha$ ist:

$$\frac{MP}{PF} = \frac{NP}{AP} = \frac{\sin \alpha}{\sin.(\beta-\alpha)} = \frac{y-b}{x}$$

und als Gleichung der geraden Linie:

$$y = \frac{\sin. \alpha}{\sin.(\beta-\alpha)} x + b,$$

welches mithin ihr allgemeinster Ausdruck ist:

344. **Coordinaten-Transformation.** Es können Umstände eintreten, die es rathsam oder nöthig machen, eine der Coordinatenachsen oder auch beide zugleich mit anderen, vielleicht für die Beziehung bequemer liegenden, zu verwechseln, wodurch begreiflich die Werthe der vorigen Coordinaten, x und y, eine durchgängige **Umgestaltung** erleiden müssen.

I. Am einfachsten ist eine solche Transformation, wenn man den **Anfangspunkt, nicht** aber die **Richtung** der Coordinaten ändert, also die neuen Achsen mit den vorigen **parallel** annimmt. Denke man sich z. B. die Lage
Fig. 138 des neuen Anfangsp. A gegen den vorigen H so, daß AF $= f$, und $AG = g$ sei, so werden die neuen Coordinaten t und u des Punktes M gefunden aus den Gleichungen:

$$FP = AP + FA. \qquad MO = MP + OP.$$

d. i. (1) $x = t + f.$ (2) $y = u + g.$

Die **Bezeichnung** der constanten Werthe f und g ändert sich nothwendig mit der **Lage** des Anfangspunktes in Beziehung auf die früheren Achsen: waren diese z. B. DX und LY, also der bisherige Anfangspunkt in K, so hat man:

$$KR = AP - AE. \qquad MR = MP - RP.$$

d. i. (1) $x = t - f.$ (2) $y = u - g.$

Soll nur **eine** der Coordinatenachsen verlegt werden, so ist f oder $g = o$, also $x = t$, oder $y = u$.

II. Denkt man ferner eine **Drehung** beider Coordinatenachsen um den Winkel α vorgenommen, so daß sie
Fig. 139 in anderer Lage UAF wiederum einen **rechten** Winkel am Anfangspunkt A einschließen, so ist

$$AQ = AS - QS \qquad MQ = RQ + MR$$

d. i. $= x. \cos. \alpha - y. \sin. \alpha.$ (2) $u = x. \sin. \alpha + y. \cos. \alpha.$

Wird außerdem der Anfangspunkt der Coordinaten von H nach A verlegt, so hat man in den vorstehenden Ausdrücken $x - f$ für x, und $y - g$ für y zu substituiren, weil $AP = FP - AF$ und $MP = MO - AG$. Es ist also in diesem Falle:

(1) $t = (x-f)\cos.\alpha - (y-g)\sin.\alpha$.

(2) $u = (x-f)\sin.\alpha + (y-g)\cos.\alpha$.

III. Wählt man statt des bisherigen rechtwinkligen ein schiefwinkliges Coordinatensystem, so daß die neue Abscissenachse mit der vorigen den Winkel α und die der Ordinaten mit ihr den W. β einschließe, so ist $AQ = t$, $MQ = u$, und Fig. 140

$$AP = AS + SP \qquad MP = RP + MR.$$

d. i. (1) $x = t.\cos.\alpha + u.\cos.\beta$. (2) $y = t.\sin.\alpha + u.\sin.\beta$.

Hieraus ergeben sich, nachdem man (1) mit $\sin.\beta$ und (2) mit $\cos.\beta$ multiplicirt, und beide Gleichungen von einander abgezogen hat:

$$(1)\ t = \frac{x.\sin.\beta - y.\cos.\beta}{\sin.(\beta-\alpha)} \qquad (2)\ u = \frac{y.\cos.\alpha - x\sin.\alpha}{\sin.(\beta-\alpha)}$$

Wird außerdem der Anfangspunkt der Coordinaten von H nach A verlegt, so hat man in den vorstehenden Ausdrücken nur $x - f$ für x, und $y - g$ für y zu substituiren, weil $AP = FP - AF$ und $MP = MO - OP$ ist.

345. Aufgaben über Linien und Winkel.

1. Die Entfernung zweier Punkte M′, M″ vermöge ihrer Coordination anzugeben. Fig. 141

Man ziehe M′O parallel AX, so ist

$$M'M'' = \sqrt{M'O^2 + M''O^2} = \sqrt{(x''-x')^2 + (y''-y')^2}.$$

2. Die Gleichung einer geraden Linie zu finden, die durch zwei Punkte M′, M″ gehe, deren Coordinaten gegeben sind. Fig. 141

Um in der gesuchten Gleichung; die (nach 342) von der Form $y = ax + b$ sein muß, die unbekannten Coefficienten a und b zu bestimmen, setze man für x und y die gegebenen Werthe x', y' und x'', y''. Dann ist

$$y'' = ax'' + b$$
$$y' = ax' + b$$
$$\text{also } y'' - y' = a(x'' - x')$$

Hieraus findet man $a = \left(\frac{y'' - y'}{x'' - x'}\right)$, und

$$b = y' - ax' = \left(\frac{x''y' - y''x'}{x'' - x'}\right).$$

Anmerkung. Ist $y'' - y' = o$, so ist auch $a = o$, d. h. die gesuchte Linie ist der Abscissenachse parallel. Für $x'' - x'$ hingegen wird $a = \infty$ oder die Lage der Linie senkrecht zu AX.

Fig. 141 3. Die Gleichung einer geraden Linie zu finden, welche einer gegebenen LL' parallel sei und durch einen gegebenen Punkt M' gehe.

Sei $y = a'x + b'$ die Gleichung der gegebenen Geraden, und $y = ax + b$ die der gesuchten parallelen, so ist (nach 343) nothwendig $a = a' = tg.\ \alpha$; ferner hat man für den Punkt M' den Werth $y' = ax' + b$, also $b = y' - ax'$, wodurch die Coefficienten der gesuchten Gleichung bestimmt sind.

Fig. 141 4. Den Winkel β zwei gerader Linien LL' nnd II' zu finden, deren Gleichungen gegeben sind.

Sei die Gleichung der ersten: $y = ax + b$

der zweiten $y = a'x + b'$,

so ist a Tangente des W. α und $a' = tg.\ \alpha'$, unter α und α' diejenigen Winkel verstanden, welche LL' und II' mit AX einschließen. Also ist $\beta = \alpha - \alpha'$, und man gewinnt ihn in Function der Tangente durch den Ausdruck:

$$tg.\ \beta = tg.(\alpha - \alpha') = \frac{tg.\alpha - tg.\alpha'}{+tg.\alpha.tg.\alpha'} = \frac{a - a'}{1 + aa'}.$$

Anmerkung. Findet man $a - a' = o$, so ist $\beta = o$, also die eine der andern Geraden parallel; ist aber $1 + aa' = o$ oder $a' = -\frac{1}{a}$, so wird $tg.\ \beta = \frac{1}{0} = \infty$, also $\beta = 90°$.

Fig. 141 5. Die Coordinaten des Durchschnittspunktes zweier gerader Linien LL' unp II' zu finden, deren Gleichungen gegeben sind.

Sei die Gleichung der ersten: $y = ax + b$
der zweiten $y = a'x + b'$,

so müssen für den Durchschnittspunkt K die Coordinaten y und x die nämlichen sein, und man findet durch Elimination:

$$x = \frac{b' - b}{a - a'}, \qquad y = \frac{ab' - a'b}{a - a'}$$

6. Die Gleichung einer geraden Linie zu finden, welche durch einen gegebenen Punkt M' auf eine andere gegebene Linie M'K senkrecht gezogen sei. Fig. 141

Sei die Gleichung der ersten: $y = ax + b$
der zweiten $y = a'x + b'$,

so hat man für den Punkt M' in der Geraden MM'

$$y' = ax' + b,$$

also durch Subtraction: $y - y' = a(x - x')$, oder $y = ax + (y' - ax')$. Nun muß aber, damit M auf K senkrecht stehe, (nach A. 4)

$$1 + aa' = 0 \qquad \text{oder } a = -\frac{1}{a'}$$

sein: mithin $y = -\frac{1}{a'}x + \left(y' + \frac{x'}{a'}\right)$.

Zweites Kapitel.

Die krummen Linien.

346. Geometrische Oerter. Jede Linie, die man sich durch das Fortschreiten eines Punktes nach irgend einer bestimmten Art und Weise, die man das Gesetz der Bildung zu nennen pflegt, erzeugt vorstellt, erhält durch die Art ihrer Entstehung einen bestimmten Character, der durch gewisse, ihren sämmtlichen Punkten zukommende Eigenschaften sie von Linien anderer Art unterscheidet. So besteht das Charakteristische der Kreislinie in ihrem überall gleichweiten Abstande vom Mittelpunkte oder der Gleichheit der Radien. Diese Ansicht von der Erzeugung regelmäßiger Linien stimmt mit derjenigen der geometrischen Oerter überein, worunter die Mathematiker des Alterthums zusammenhangende Züge verstanden, deren sämmtliche Punkte den Bedingungen einer geometrischen Aufgabe Genüge leisteten. So ist der geometr. Ort der Spitze eines Dreiecks, dessen Grundlinie und Flächeninhalt gegeben sind (nach 273 L. 2.) eine, der Grundlinie parallel gezogene Gerade, wenn aber außer der Grundlinie der Winkel an der Spitze gegeben ist, (nach 261 L. 7) eine Kreislinie. Wäre außer der Grundlinie die Summe oder Differenz der beiden andern Seiten gegeben, so erhielte man als geom. Oerter der Spitze diejenigen Curven, die in folgenden Capiteln unter den Namen von Ellipse und Hyperbel ausführlich betrachtet werden.

347. Gleichungen der Curven. Aber noch auf andere Weise, als durch geometrische Bedingungen läßt sich das Gesetz der Bildung einer Linie aussprechen, wovon die allgemeine algebraische Darstellung der geraden Linie durch die Gleichung $y = ax + b$ bereits ein Beispiel geliefert hat. Gleichungen höheren Grades, in denen die unbestimmten Größen x und y in irgend einer Verbindung stehen, wonach man, die eine als Function der andern betrachten kann, geben eben so wol, als jene einfache vom ersten Grade, eine beliebige Anzahl correspondirender Werthe für

Abscissen und Ordinaten; aber nothwendig muß der, durch die Endpunkte der letzteren geführte, zusammenhangende Zug einer Curve darstellen, weil nach der Voraussetzung die Aenderung der Coordinaten x und y hier nicht, wie in $y = ax + b$, eine gleichförmige sein kann, sondern vielmehr beide veränderliche Größen nach anderen Potenzen zu- oder abnehmen, womit die Entstehung einer geraden Linie AN oder FM (Fig. 137) sich nicht verträgt. Da die Menge von Gleichungen zwischen zwei unbestimmten Größen, die als krumme Linien construirt zu werden vermögen, unbegränzt ist, so pflegt man sich bei ihrer allgemeinen Betrachtung auf die sogenannten algebraischen zu beschränken, worin nur gegebene rationale Exponenten von x und y vorkommen; die transscendenten Gleichungen (und Curven) hingegen, worin logarithmische oder trigonometrische Functionen von x oder y erscheinen, (wie z. B. $\log. y = ax^2 + b$, $y = a. \cos. x - b. \tang. x$) unbeachtet zu lassen.

348. Eintheilung der Curven. Bei der unendlichen Mannigfaltigkeit der krummen Linien läßt sich eine, auf ihre Gestalt gegründete, Eintheilung nur nach ganz allgemeinen Merkmalen vornehmen und erscheint wegen der daraus fließenden Allgemeinheit ganz nutzlos. Man kann sich nämlich vorstellen, daß eine Curve in sich selbst zurücklaufe und dadurch eine bestimmte Figur bilde, wie die Kreislinie; oder daß sie nach Art der Geraden bis in's Unendliche sich verlängern lassen, ohne einen Flächenraum einzuschließen; endlich noch, daß sie beide Eigenschaften mit einander verbinden, wie ein Kreis mit der an ihm gezogenen Tangente. Es lassen sich also überhaupt geschlossene, unbegränzte, und gemischte Curven denken. Zu den letzten gehört die Linie BCKJLH. Fig. 142 Den von irgend einem Punkte nach derselben Seite liegenden Theil einer Curve, wie BGC oder NL, kann man einen Zweig, und den Durchschnittspunkt N worin zwei ihrer Zweige einander durchschlingen, einen Knoten derselben nennen. Als Hülfslinien für die Bestimmung ihres Laufs dienen die Tangente (GD), die senkrecht auf dieser stehende Normale (GF), die Subtangente (DE) und endlich die Subnormale (EF). In Beziehung auf eine ihrer Achsen, AX, heißt

ein Stück NK der Curve, welches zwischen jene und eine schneidende Gerade (also in einem spitzen Winkel) fallen würde, convex; ein solches aber, das, wie BC, außerhalb der schneidenden Geraden (also in einem stumpfen Winkel) liegen würde, concav; diejenigen Punkte, in denen Parallelen der Achsen die Curve berühren, wie C, I, L, K, H, werden — weil in ihnen die Curve wieder den Achsen sich zuwendet — Wendepunkte derselben genannt. Alle diese Benennungen, von denen die letzten ohnehin nur relativ sind, gehören allerdings zur Betrachtung der Curven, führen aber zu keinem Grundsatze ihrer Anordnung. Es bleibt mithin nichts übrig, als in den Gleichungen, wodurch sie dargestellt werden, einen algebraischen Eintheilungsgrund zu suchen, wozu sowol der Grad derselben, als die Beschaffenheit der Coefficienten ihrer Glieder ein schickliches Mittel darzubieten scheinen.

349. Intersection der Curven. Sei $y=f(x)$ die Andeutung einer beliebigen algebraischen Gleichung zwischen zwei veränderlichen Größen, so erhält man, $y=o$ setzend, in $f(x)=o$ den besondern Zustand der Gleichung, worin sämmtliche Wurzeln oder auflösenden Werthe von x Abscissen derjenigen Punkte der Achse darstellen, in welchen dieselbe von der Curve geschnitten wird. Die Anzahl der Wurzeln der Gleichung $f(x)=o$ hängt aber (nach 199) von dem Grade derselben ab; ist sie vom n^{ten} Grade, so sind der Wurzeln auch n, worunter sich auch (nach 202) imaginäre, jedoch nur paarweise, befinden können. Man darf daraus schließen, daß eine Curve, die das Resultat der Construction einer Gleichung vom n^{ten} Grade ist, in nicht mehr, als n Punkten von der Abscissenachse durchschnitten werden kann, wohl aber in wenigeren, sofern unter den Wurzeln der Gleichung $f(x)=o$ auch imaginäre vorkommen, die begreiflich nicht durch Abscissen von bestimmter Länge, wie die reellen Wurzeln, dargestellt werden können. Demnach bieten die verschiedenen Grade der algebraischen Gleichungen das bequemste Mittel dar, die Curven in Ordnungen einzutheilen, deren Grad mit dem der Gleichungen, also auch mit der Anzahl der mögl. lichen Intersectionen der Curve und einer Geraden

(die nicht eben die angenommene Abscissenlinie zu sein braucht) genau übereinstimmt.

Die einfachste Beziehung zwischen algebraischen Gleichungen höherer Grade und ihrer Construction durch Abscissen und Ordinaten gewährt ein sehr taugliches Mittel, die Gränzen der Wurzeln (203) dadurch zu bestimmen, daß man die gegebene Gleichung $f(x) = o$ als $f(x) = y$ betrachtet, für y die Reihe der natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3.. positiv und negativ genommen, substituirt (nöthigenfalls auch gebrochene Zahlen) und die daraus entspringenden Werthe X_1, X_2, X_3..... als Ordinaten auf einer eingetheilten Abscissenlinie in paralleler Lage und der gehörigen Richtung abträgt, um die Endpunkte derselben durch einen continuirlichen Zug zu verbinden. Denn da, wo zwei successive Ordinaten, QN und RL, nach verschiedenen Richtungen abgetragen sind, weil die Substitution benachbarter Zahlen verschieden bezeichnete Werthe für y gab, ist offenbar der eine Werth von x zu hoch, der andere zu niedrig angenommen und derjenige, welcher y annulliren würde (eine reelle Wurzel) zwischen beiden enthalten (204). Es können sogar mehrere Wurzeln zwischen zwei solchen Gränzen, z. B. den zu QN und TH gehörigen Abscissen, liegen, aber jedenfalls nur in ungerader Anzahl. Denn ein, zwischen den Endpunkten N und H zwei widerstreitender Ordinaten mehrfach gebogener Zug kann im Allgemeinen eine gerade AX nur in 1, 3, 5, 7... Punkten, nicht aber in 2, 4, 6, ... durchschneiden. Sollte eine Biegung die Gerade, wie in S, nur berühren, so stellt die Abscisse AS zwei gleiche Wurzeln der Gleichung dar; und bleibt gar ein Abstand zwischen beiden, wie PM, so ist das ein Merkmal von der Anwesenheit imaginärer Wurzeln. Wo dergleichen vorhanden sind, kann sogar binnen gewissen Gränzwerthen von x die Curve gänzlich aufhören und in getrennten Zügen zum Vorschein kommen. Fig. 142

Sollte eine algebraische Gleichung $F(x, y) = o$ durch Multiplication anderer $f(x, y) = o$, $\varphi(x, y) = o$, ... entstanden oder in dieselben zerlegbar sein, so stellt sie keine zusammenhangende Curve, sondern vielmehr getrennte Linien dar, wovon jede einzelne einer der erzeugenden Gleichungen angehört.

350 **Anwendungen.** I. Sei, um die vorstehende allgemeine Betrachtung durch Beispiele zu erläutern, zunächst zur Construction einer Curve der **zweiten Ordnung** die Gleichung $(y-3)^2+(x-2)^2=16$, oder $y=3\pm\sqrt{16-(x-2)^2}$ gegeben, so hat man bei verschiedenen Substitutionen für x folgende correspondirende Werthe:

$x=-3$;	$y=3\pm 3\sqrt{-1}$,	also $=i$ und i.
-2;	$\ldots 3\pm 0$	$\ldots+3{,}00\ldots+3{,}00$
-1;	$\ldots 3\pm\sqrt{7}$	$\ldots+5{,}64\ldots+0{,}36$
0;	$\ldots 3\pm\sqrt{12}$	$\ldots+6{,}46\ldots-0{,}46$
$+1$;	$\ldots 3\pm\sqrt{15}$	$\ldots+6{,}87\ldots-0{,}87$
$+2$;	$\ldots 3\pm 4$	$\ldots+7{,}00\ldots-1{,}00$
$+3$;	$\ldots 3\pm\sqrt{15}$	$\ldots+6{,}87\ldots-0{,}87$
$+4$;	$\ldots 3\pm\sqrt{12}$	$\ldots+6{,}46\ldots-0{,}46$
$+5$;	$\ldots 3\pm\sqrt{7}$	$\ldots+5{,}64\ldots+0{,}36$
$+6$;	$\ldots 3\pm 0$	$\ldots+3{,}00\ldots+3{,}00$
$+7$;	$\ldots 3\pm 3\sqrt{-1}$	$\ldots\ i\ \ldots\ i$.

Die widerstreitenden Zeichen der benachbarten Ordinaten für $x=0$ und -1, so wie für $x=4$ und 5 geben zu erkennen, daß zwischen jenen Gränzen worin die zwei Wurzeln
Fig. 143 der Gleichung $3\pm\sqrt{16-(x-2)^2}=0$, oder $x^2-4x-3=0$ enthalten sind, also etwa in Q, O die Curve von der Abscissenlinie **geschnitten** wird. Der Ordinaten sind zwei für jede Abscisse vorhanden, und augenscheinlich entsprechen die für $x=-2$ und $+6$ zwei **Wendepunkten** K, L jenseits welcher für niedrigere und höhere Werthe von x nur **imaginäre** Werthe für M gefunden werden. Das **Maximum** erreichen die Ordinaten, wenn $x=+2$, und da sie von hier nach beiden Wendepunkten gleichmäßig abnehmen, muß die Curve nothwendig **symmetrisch** und **geschlossen** sein. In der That ist die gegebene Gleichung nur ein besonderer Fall der allg. Form $(y-a)^2+(x-b)^2=r^2$, (nach der Zeichnung $MN^2+CN^2=CM^2$) wodurch die Kreislinie algebraisch dargestellt wird.

II. Als zweites Beispiel diene die Construction einer Curve der **dritten Ordnung** nach der Gleichung $y^2-4xy=x^3+4x^2-10x-8$, welche sich in

$(y-2x)^2 = x^3-10x-8$ oder $y = 2x \pm \sqrt{x^3-10x-8}$ umgestalten läßt. Hier erhält man die correspondirenden Werthe:

$$x = -3,\ -2,\ -1,\ 0 \ldots +3,\ +4,\ +5,\ +6 \ldots$$

$$y = \text{i}, -4 \pm \sqrt{4}, -2 \pm \sqrt{1}, \text{i} \ldots \text{i}, 8 \pm \sqrt{16}, 10 \pm \sqrt{67}, 12 \pm \sqrt{148}$$

$$= \begin{cases} \text{i}, -2{,}00, -1{,}00, \text{i} \ldots \text{i}, +12{,}00, +14{,}06, +24{,}16 \ldots \\ \text{i}, -6{,}00, -3{,}00, \text{i} \ldots \text{i}, +4{,}00, +5{,}93, -0{,}16 \ldots \end{cases}$$

Es ergiebt sich hier nur eine einzige Intersection der Curve mit der Abscissenlinie zwischen $x = 5$ und 6, also auch nur eine reelle Wurzel der cubischen Gleichung $2x \pm \sqrt{x^3-10x-8} = 0$ oder $x^3-4x^2-10x-8 = 0$; den beiden imaginären entspricht das nicht geschnittene Stück CD der Curve, deren anderer Theil MS in's Unendliche sich erstreckt. Drei Intersectionen würde man durch ein paralleles Verschieben der Abscissenachse um -2 erhalten, wodurch sie die Lage BT annimmt. Führt man dieser Vorstellung gemäß neue Ordinaten u in die Gleichung ein, indem man $y = u-2$ setzt, so wird sie: Fig. 144

$$u = 2x + 2 \pm \sqrt{x^3-10x-8},$$

also jeder der obigen Ordinatenwerthe um 2 erhöhet, wodurch sich sogleich $x = -2$ als Wurzel ergiebt; die beiden andern fallen zwischen $x = (0$ und $-1)$, und $x = (6$ und $7)$. Diesen Werthen entsprechen die Punkte C, E, S.

III. Ferner möge eine Curve der vierten Ordnung nach der Gleichung $y^4-96y^2-x^4+100x^2 = 0$ construirt werden, welche nach der Auflösung quadratischer Gleichungen folgende vier Wurzeln giebt:

(1) $y = +\sqrt{48+\sqrt{(x^4-100x^2+2304)}}$

(2) $y = +\sqrt{48-\sqrt{(\ldots)}}$

(3) $y = -\sqrt{48+\sqrt{(\ldots)}}$

(4) $y = -\sqrt{48-\sqrt{(\ldots)}}$

Durch Substitution der gewöhnlichen Zahlenfolge erhält man hierdurch folgende correspondirenden Werthe der Coordinaten.

$x = 0$;	$y = (1) + 9{,}79$	(2) 0,00	(3) − 9,79	(4) 0,00	
± 1;	$+ 9{,}74$	$+ 1{,}02$	$- 9{,}74$	$- 1{,}02$	
± 2,	$+ 9{,}58$	$- 2{,}04$	$- 9{,}58$	$+ 2{,}04$	
± 3;	$+ 9{,}30$	$+ 3{,}07$	$- 9{,}30$	$- 3{,}07$	
± 4;	$+ 8{,}88$	$+ 4{,}12$	$- 8{,}88$	$- 4{,}12$	
± 5;	$+ 8{,}28$	$- 5{,}22$	$- 8{,}28$	$+ 5{,}22$	
± 6;	$+ 6{,}92$	$+ 6{,}92$	$- 6{,}92$	$- 6{,}92$	
± 7;	i	i	i	i	
± 8;	$+ 6{,}92$	$+ 6{,}92$	$- 6{,}92$	$- 6{,}92$	
± 9;	$+ 8{,}69$	$+ 4{,}51$	$- 8{,}69$	$- 4{,}51$	
± 10;	$+ 9{,}79$	0	$- 9{,}79$	0	
± 11;	$+ 10{,}84$	i	$- 10{,}84$	i	
± 12;	$+ 11{,}85$	i	$- 11{,}85$	i	

Die vier reellen Wurzeln der Gleichung ergeben sich aus den Intersectionen für $x = 0$ und ± 10 als 0, $+10$, 0 und $+10$. Für $x = \pm 6$ und ± 8 erhält man doppelte (gleiche) Ordinaten, also Wendepunkte der Curve, welche zwischen diesen Gränzen ganz aufhört; übrigens aber wegen ihrer entgegengesetzten gleichen Ordinaten zu beiden Seiten der Abscissenlinie einen völlig symmetrischen Lauf nehmen muß. Die ausgeführte Construction zeigt, daß sie aus drei getrennten Stücken besteht; einer geschlossenen Curve AML deren Zweige in sich zurücklaufen und im Anfangspunkte A einen Knoten bilden, und zwei Stücken, CB und NR, die ihre Zweige in's Unendliche ausdehnen. Diese Symmetrie im Laufe der Curve ließ sich nach der Form der Gleichung, welche ihr zum Grunde liegt, schon voraussehen.

Fig. 145

IV. Zum Schlusse mag noch die Gleichung

$$y^4 + (4 + x)\,y^3 - 6xy^2 - 2(4x - x^2)\,y + 8x^2 = 0,$$

welcher eine Curve des vierten Grades anzugehören scheint, ein Beispiel jener complexen Curven geben, die aus mehreren Linien zusammengesetzt sind. Die vorstehende Gleichung ist nämlich die Entwickelung der einfacheren

$$(y^2-2x)(y-x)(y+4)=0,$$

welcher augenscheinlich die vier Wurzeln $y=x$, -4, $\pm\sqrt{2x}$ genügen. Nun stellt aber $y-x=0$ eine gerade Linie AL dar, die der Anfangspunkt der Coordinaten durchschneidet und mit der Abscissenlinie einen Winkel $\alpha=\frac{1}{2}R$ bildet, ferner $y=-4$ eine mit dieser parallele Gerade IH; und $y=\pm\sqrt{2x}$ eine Curve AM, die von dem Anfangspunkte nach der positiven Seite der Abscissen zwei unendliche Zweige ober- und unterhalb ausbreitet, so daß die gegebene Gleichung drei unzusammenhangende Linien, zwei der ersten und eine der zweiten Ordnung in sich vereinigt. Fig. 146

351. Curven zweiter Ordnung. Die allgemeinste Form einer algebraischen Gleichung des zweiten Grades zwischen zwei unbestimmten Größen, also der umfassende Ausdruck aller Curven der zweiten Ordnung ist

$$Au^2+But+Ct^2+Du+Et+F=0 \quad \ldots\ldots (1)$$

oder, auf die Gestalt $u=f(t)$ gebracht:

$$u=-\left(\frac{Bt+D}{A}\right)\pm\sqrt{\left[\left(\frac{B^2-4AC}{4A^2}\right)t^2+\left(\frac{BD-2AE}{2A^2}\right)t+\left(\frac{D^2-4AF}{4A^2}\right)\right]}$$

in kürzerer Andeutung:

$$u=(at+b)\pm\sqrt{(pt^2+qt+r)} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Der erste Theil dieses Ausdrucks von u stellt (nach 342) eine gerade Linie dar, zu deren beiden Seiten nach Andeutung des zweiten Theils Coordinaten von gleicher Länge abgetragen werden sollen, deren Endpunkte der Curve angehören. Mithin bestimmt der erste Theil nur ihre Lage gegen die Abscissenachse, der zweite Theil aber ihre Gestalt. Da nun für die Untersuchung der Curve diese allein von Wichtigkeit ist, und jene dabei nur insofern in Betracht kommt, als man zu ihrer Erleichterung die einfachste und bequemste Lage vorzuziehen hat, so erscheint es im vorliegenden Falle sehr zweckmäßig, die durch $(at+b)$ dargestellte gerade Linie als Abscissenachse zu betrachten. Damit nun zugleich die Curve auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen werde, denke man sich für den oben gegebenen Ausdruck (1)

oder (2) ein schiefwinkliges gewählt, dessen Achsen CU und CT einen solchen Winkel (β) mit einander einschließen, daß die Ordinaten **senkrecht** auf der neuen Abscissenlinie DX stehen. Bezeichnet man die neuen Coordinaten in Beziehung auf den, etwa in B fallenden, Anfangspunkt mit y und x, so erhält man — weil GP = BP + GB, d. i. t. cos. α = x + n oder $t = \frac{x+n}{\cos.\alpha}$ ist —

$$y = \sqrt{\left(\frac{x+n}{\cos.\alpha}\right)^2 p + \left(\frac{x+n}{\cos.\alpha}\right) q + r}$$

oder einfacher: $y = \sqrt{gx^2 + hx + k}$ . . . . . (3)

Der letzte Schritt der Vereinfachung möge noch darin bestehen, daß wir den Anfangspunkt der Coordinaten (B) in den Scheitel der Curven (nach A) verlegen, indem wir (x + m) statt x substituiren, um in dieser Absicht gemäß zu bestimmen. Der Ausdruck der Curve wird dadurch

$$y = \sqrt{gx^2 + (h + 2gm)x + (gm^2 + hm + k)}$$

Sollen nun die Coordinaten gleichzeitig verschwinden, so muß $gm^2 + hm + k = 0$ werden, wodurch m bestimmt ist. Dann aber ist die, auf den Scheitelpunkt der Curve als Anfangspunkt ihrer rechtwinkligen Coordinaten bezogene Gleichung:

$$y = \sqrt{gx^2 + (h + 2gm)x} = \sqrt{gx^2 + fx}, \ldots . (4)$$

worin die Coefficienten g, f, als abhängig von denen des allgemeinen Ausdrucks (1) und den Winkeln α und β, jedes beliebigen Werthes fähig, also positive und negative Zahlen oder auch Null sein können.

352. **Arten der Curven 2ter Ordnung.** In der vorstehenden Gleichung, als der einfachsten allgemeinen Darstellung der Curven zweiter Ordnung, erkennt man bei näherer Betrachtung dreierlei **Arten** derselben, die durch ihre Charakter sich wesentlich von einander unterscheiden.

1 Es sei zunächst g = 0, so reducirt sich die Gleichung auf $y = \sqrt{fx}$, und stellt eine krumme Linie dar, die (wie MAm) **mit zwei symmetrischen Zweigen auf**

der positiven Seite der Abscissen sich in's Unendliche erstreckt, während für negative Abscissen die Ordinaten unmöglich werden. Hierin besteht der Charakter der ersten Curven-Art 2ter Ordnung.

II. Werde ferner g negativ angenommen, so deutet die Gleichung $y = \sqrt{fx - gx^2}$ auf eine Curve, deren nach der positiven Abscissenseite symmetrisch fortlaufende Schenkel sich dann schließen, wenn bei dem zunehmenden Werthe von x endlich $fx - gx^2 = o$ oder $x = \frac{f}{g}$ geworden ist. Da für größere und für negative Werthe von x diejenigen von y imaginär werden, so bildet die Curve eine geschlossene Figur zwischen dem Anfangspunkte der Coord. und einem zweiten Punkte der Abscissenlinie, welcher von jenem um die Abscisse $+\frac{f}{g}$ entfernt ist, wie ANX. Diese Eigenschaft characterisirt im Allgemeinen die zweite Art der Curven 2ter Ordnung.

III. Sei endlich g eine positive Größe, so giebt der Ausdruck $y = \sqrt{fx + gx^2}$ zu erkennen, daß die Curve sowol für negative, als auch für positive Werthe von x vorhanden sei und die Abscissenlinie außer in dem Anfangspunkte noch da in einem zweiten Punkte durchschneide, wo $y = o$ oder $x = -\frac{f}{g}$ geworden, d. h. auf der negativen Seite. Für negative Werthe von x, wobei fx das Glied gx^2 übersteigt, findet man nur imaginäre Werthe von y, also keine Ordinaten der Curve. Diese erstreckt sich folglich von den beiden Durchschnittspunkten aus nach entgegengesetzten Seiten, und zwar (wegen der mit x unaufhörlich wachsenden Ordinaten) mit unbegränzten Zweigen, so daß sie aus zwei getrennten Stücken besteht, wie AM und DE; und hierin finden wir das wesentliche Merkmal der dritten Art von Curven 2ter Ordnung.

Die nachfolgenden Capitel werden zeigen, wie man durch rein geometrische Vorstellungen zu dem hier algebraisch abgeleiteten und nur im Allgemeinen characterisirten drei

Arten von Curven gelangt, und die Eigenthümlichkeiten jeder einzelnen näher entwickeln.

Drittes Kapitel.

Die Parabel.

Fig. 148 353. **Kegelschnitt der Parabel.** Wenn man durch einen geraden Kegel in irgend einer Richtung eine Ebene gelegt denkt, so wird der Durchschnitt beider im Allgemeinen eine Curve, und nur in dem besondern Falle, wo des Kegels Achse in die Ebene fällt, einen geradlinigten Winkel CKD, den sogenannten Scheitelwinkel des Kegels, bilden. Wenn nun durch einen Schenkel dieses Winkels (in A) die Durchschnittsebene AMm parallel mit seinem andern Schenkel und senkrecht auf seine Ebene gelegt wird, so entsteht diejenige Durchschnitts-Curve, der man den Namen Parabel gegeben hat.

354. **Gleichung der Parabel.** Um das Gesetz dieser Curve vermöge der Beziehung rechtwinkliger Coordinaten ihrer Punkte in einer Gleichung zwischen x und y
Fig. 148 darzustellen, denke man sich die Durchschnittsebene AMm von der senkrechten des Scheitelwinkels CKD, und beide wiederum von einer, zur Achse des Kegels senkrechten, Ebene GMD geschnitten. Der Durchschnitt der letzteren ist (nach 315 L. 1) ein Kreis und die Linie Mm (nach 301 L. 4) eine Senkrechte auf AP und CD. Folglich hat man:

(1) $CP : PM = PM : PD$ oder $CP \cdot PD = PM^2$.

(2) $AP : CP = KB : AB$ oder $AP \cdot AB = CP \cdot KB$.

und hieraus (3) $PM^2 = \frac{AB \cdot PD}{KB} \cdot AP = \frac{AB^2}{AK} \cdot AP$.

d. i. wenn $AP = x$, $PM = y$, und $\frac{AB^2}{AK} = p$ gesetzt wird:

(4) $y^2 = px$ oder $y = \sqrt{px}$,

worin wir den Ausdruck der einfachsten Art von Curven der zweiten Ordnung (352) erkennen, Der als dritte Propor-

tionale zu AK und AB, von der Größe des Scheitelwinkels AKB und dem Abstande AK des Scheitelpunkts der Curve von der Spitze des Kegels abhängige, constante Werth p wird der Parameter der Parabel genannt, und kann leicht (nach 270 L. 4) als Linie construirt werden. In Function des Winkels AKB = α findet man:

$$p = \frac{AB^2}{AK} = 2.\,AK.\,\sin.\,\tfrac{1}{2}\alpha^2.$$

355. Eigenschaften der Parabel. Die geometrische Deutung der hier entwickelten Gleichung der Parabel läßt uns folgende Eigenschaften der Curve ohne Mühe erkennen: Fig. 149

1. Da der Parameter p nothwendig eine positive Größe ist, so sind negative Werthe der Abscissen nicht zulässig, also alle Punkte der Curve nur auf der positiven Seite vorhanden.

2. Mit den Abscissen wachsen auch die Ordinaten in's Unendliche; folglich gehört die Parabel zu den unbegränzten Curven.

3. Diese wachsen, wie die Quadratwurzeln von jenem, also immer unbedeutender, je größer man die Werthe von x annimmt. Die Schenkel der Parabel biegen sich mithin unaufhörlich gegen die Abscissenachse.

4. Für jede positive Abscisse sind zwei Ordinaten von gleicher Länge aber entgegengesetzter Lage vorhanden, wonach die Parabel sich zu beiden Seiten der Achse völlig symmetrisch erstreckt, also von dieser halbirt wird.

5. Für die Abscisse $AF = \frac{1}{4}p$ ist die Ordinate $FN = \frac{1}{2}p$, also ihre doppelte Länge Nn der Parameter.

Anmerkung. Dieser Punkt F der Achse heißt der Brennpunkt der Parabel, und jede von ihm nach dem Umfange der Curve gezogene Gerade FM Radius vector oder Zuglinie.

6. Die Zuglinie $z = FM$ in irgend einem Punkte M der Parabel ist der, um $\frac{1}{4}p$ vermehrten, Abscisse desselben gleich. Denn aus $z^2 = y^2 + (x - \frac{1}{4}p)^2 = px + (x - \frac{1}{4}p)^2 = x^2 + \frac{1}{2}px + \frac{1}{16}p^2$ folgt $z = x + \frac{1}{4}p$.

356. Coordinaten-Transformation.

Fig. 138 I. Nimmt man als Abscissenlinie der Parabel eine, ihre Achse senkrecht durchschneidende, Linie GU, und den Anfangspunkt der neuen, rechtwinklicht bleibenden, Coordinaten in A an, so ist (344, I), wenn AU die positive Richtung der neuen Abscissen, und AT diejenige der neuen Ordinaten bezeichnen soll:

$$(1)\ x = t + f \qquad (2)\ y = u + g.$$

Die Substitution dieser Werthe giebt der Gleichung der Parabel, $y^2 = px$, die Gestalt:

$$t = \frac{(u+g)^2}{p} - f = \frac{(u+g)^2 - pf}{p},$$

welche sich, wenn man in der Entwickelung $pf - g^2 = o$ setzt, weil die Parabel durch den neuen Anfangspunkt A gehen soll, also für $t = o$ auch $u = o$ werden muß, noch vereinfacht auf:

$$t = \frac{2gu + u^2}{p}.$$

Fig. 140 II. Denkt man sich hingegen die rechtwinklichten Coordinaten in *schiefwinklichte* verwandelt, so daß die neuen Coordinaten-Achsen mit der bisherigen Abscissenlinie die Winkel α und β bilden, und *verlegt* zugleich den Anfangspunkt von dem Scheitel H nach irgend einem Punkte A der Parabel, so ist (nach 344, III):

$$(1)\ x = t\cos.\alpha + u\cos.\beta + f. \qquad (2)\ y = t\sin.\alpha + u\sin.\beta + g.$$

und nach Substitution dieser Werthe in $y^2 = px$ die neue Gleichung der Curve:

$$\left.\begin{array}{l} u^2\sin.\beta^2 + 2ut\sin.\alpha.\sin.\beta + t^2\sin.\alpha^2 + g^2 - fp \\ +(2g\sin.\beta - p\cos.\beta)u + (2g\sin.\alpha - p\cos.\alpha)t \end{array}\right\} = o$$

Damit nun die neue Abscissenlinie AT, wie die vorige, die Parabel so durchschneide, daß zu beiden Seiten derselben *gleiche Ordinaten* liegen oder AT ein *Durchmesser* derselben sei, dürfen wir nur die vorliegende Gleichung auf die obige einfache Form $u = \pm\sqrt{kt}$ bringen. Dies geschieht dadurch, daß man:

$$(1)\ \sin.\alpha.\sin.\beta = o \quad (2)\ \sin.\alpha^2 = o \quad (3)\ g^2 - pf = o$$
$$\text{und } (4)\ 2g\sin.\beta - p\cos.\beta = o$$

setzt, weil dann alle Mittelglieder verschwinden, $\alpha = o$ und cos. $\alpha = 1$ wird, und also nur

$$u^2 = \frac{p}{\sin.\beta^2}\, t$$

als neue Gleichung übrig bleibt. Aus der Bedingungsgleichung $\alpha = o$ folgt, daß jener sogenannte Durchmesser der Parabel ihrer Achse parallel laufen müsse; die Gleichung (3) bestimmt die Lage des Punktes A gegen H, und aus (4) tg. $\beta = \frac{p}{2g}$ ergiebt sich der Winkel, um welchen die neuen Ordinaten gegen die Achse geneigt sein müssen, wenn sie zu beiden Seiten gleiche Länge erhalten sollen.

356. Lehrsätze über die Parabel. Die Eigenschaft der Parabel, daß jede Zuglinie zu einem ihrer Punkte der um $\frac{1}{4}p$ vermehrten Abscisse desselben gleich ist, erlaubt uns, diese Curve rein geometrisch und ohne alle Rücksicht auf ihre Entstehung und davon abhängige Gleichung sehr einfach zu definiren. Denkt man nämlich in dem Abstande $\frac{1}{4}p$ jenseit des Scheitelpunkts A eine Senkrechte KL errichtet, so ist nach jener Eigenschaft allgemein FM = KM, mithin die Parabel, diejenige krumme Linie, deren Punkte gleichweit von einem bestimmten Punkte und einer, denselben nicht treffenden, geraden Linie entfernt sind. Jener Punkt werde der Brennpunkt, diese Linie die Directrix oder Richtungslinie genannt; der Abstand beider, FG, wovon augenscheinlich die Gestalt der Curve abhängt, heiße — doppelt genommen — ihr Parameter, die durch F auf KL gezogene Senkrechte überhaupt die Achse und jede von irgend einem Punkte M der Curve auf die Directrix gefällte Senkrechte, MK, ein Abstandsperpendikel desselben. Unmittelbar aus der obigen Definition folgt alsdann, daß die Parabel ihre Achse mitten zwischen dem Brennpunkte und der Directrix durchschneidet, wodurch der Scheitel der Curve bestimmt wird, mit Beziehung auf frühere Sätze aber folgende Reihe von Theoremen: Fig. 149

1. Die Parabel kann von einer geraden Linie RS höchstens in zwei Punkten geschnitten werden.

Fig. 149. Denn wäre O ein dritter Durchschnittspunkt, so müßte, wenn von O eine Senkrechte auf KL gezogen wird, FO = OK = OM + MK = OM + MF sein, welches unmöglich ist.

2. Die senkrecht durch die Achse geführten Sehnen der Parabel werden von jener halbirt.

Denn es ist FM = MK = NL = NF, folglich (249 L. 19) Dr. FMP = FNP, und deshalb MP = NP.

3. Eine gerade Linie, welche den, an einem Punkte M der Parabel von der Zuglinie und dem Abstandsperpendikel gebildeten, Winkel FMK halbirt, ist Tangente derselben an diesem Punkte.

Denn angenommen, die den W. FMK halbirende Linie MT könne außer M noch einen zweiten Punkt V mit der Par. gemein haben, so wäre einerseits FV = VH, und andernseits, weil Dr. VKF (nach 249 L. 3) gleichschenklich sein muß, FV = VK, welches (249 L. 8) unmöglich ist.

Zusätze. I. Die Tangente eines Punktes M der Parabel halbirt unter einem rechten Winkel die aus dem Brennpunkte nach dem Fußpunkte des Abst. Perp. gezogene Linie FK.

II. Die Linie FK halbirt ebenfalls das Stück der Tangente zwischen dem Berührungspunkte und der Achse. Denn wegen W. CFM = CKM = CFT sind (249 L. 3) Dr. FCM = FCT.

4. Die Subtangente PT eines Punktes M der Parabel ist seiner doppelten Abscisse gleich.

Denn da FT = MK = GP, so ist auch GT = FP, und da AG = AT, auch AT = AP oder TP = 2AP.

5. Die Subnormale PW der Parabel ist dem halben Parameter gleich.

Denn da die Normale MW und die Linie KF beide senkrecht zur Tang. MT stehen, so ist im Parall. KW die Seite FW = KM, nach Abzug von FP = IM also PW = FG.

6. Die Normale MW der Parabel ist mittlere geometr. Proportionale zwischen Zuglinie und Parameter.

Denn es ist (267 L. 7) TW : MW = MW : PW, oder $\frac{2MK}{MW} = \frac{MW}{GF}$, d. i. $\frac{z}{MW} = \frac{MW}{p}$.

7. Die Ordinate PM der Parabel ist mittlere Proportionale zwischen Abscisse und Parameter.

Denn es ist $TP : PM = PM : PW$, oder (L. 4 und 5)

$$\frac{2AP}{PM} = \frac{PM}{GF}, \text{ d. i. } \frac{AP}{PM} = \frac{PM}{2GF} = \frac{PM}{p}.$$

8. Die Tangente TM ist mittlere Proportionale zwischen der doppelten Zuglinie und der doppelten Abscisse des Berührungspunktes M

Denn es ist:

$$\frac{TW}{MT} = \frac{MT}{TP}, \text{ d. i. } \frac{2MK}{MT} = \frac{MT}{2AP}.$$

9. Eine Senkrechte FC aus dem Brennpunkte auf die Tangente ist mittlere Proportionale zwischen der Zuglinie und dem vierten Theile des Parameters

Denn wegen $CF = CK$ und $AF = AG$ steht AC senkrecht auf FT; folglich ist $FT : FC = FC : AF$, oder $FC^2 = \frac{1}{4}p.x$.

Zusatz. Die Quadrate zweier, aus dem Brennpunkte auf die Tangenten der Berührungspunkte M und M' gefällten, Senkrechten verhalten sich, wie die Zuglinien dieser Punkte: $FC^2 : FC'^2 = z^2 : z'^2$.

10. Jeder (der Achse parallele) Durchmesser AT der Parabel halbirt die, der Tangente des Scheitelpunktes A parallel gezogenen, Sehnen. Fig. 150

Denn zieht man MN mit der Tangente SU parallel und aus M und N mit den Radien MF und NF zwei Kreise, so schneiden sich diese in F und I und berühren die Richtungslinie in K und L. — FG und FI müssen nun, weil die auf ihnen Senkr. US und MN parallel laufen, eine gerade Linie GI bilden, die (269 L. 6) KL in G halbirt. Folglich wird MN auch von dem Durchm. AT (265 L. 1) in zwei gleiche Theile getheilt.

11. Für jeden Durchmesser der Parabel verhalten sich die Quadrate der Ordinaten, wie die zugehörigen Abscissen. Fig. 150

Denn wegen Aehnlichkeit der Dreiecke hat man

$$\frac{AP}{CB} = \frac{GA}{GC} = \frac{GF}{EF},$$

also $AP . EF = CB . GF$ oder $AP . \frac{1}{4}p = \frac{1}{4}GI . GF$.

Da nun (269 L. 3) $GF \cdot GI = GK^2 = MQ^2$, so ist $p \cdot AP = MQ^2$ und aus denselben Gründen $p \cdot AP' = M'Q'^2$, also $AP : AP' = MQ^2 : M'Q'^2 = MP^2 : M'P'^2$.

Fig. 150 12. Wenn man durch die Mitte O einer Ordinate MP dem Durchmesser AT eine Linie OD bis zum Durchschneiden mit der Parabel parallel zieht, so beträgt dieselbe $\frac{3}{4}$ der Abscisse.

Denn aus dem Verhältniß $MP^2 : DV^2 = AP : AV$ folgt

$$\frac{MP^2 - DV^2}{DV^2} = \frac{AP - AV}{AV}, \text{ d. i. } \frac{3DV^2}{DV^2} = \frac{VP}{AP},$$

also $DO : AP = 3 : 1$ oder $DO = \frac{3}{4} AP$.

Fig. 150 13. Wenn man durch Verbindung der Endpunkte einer Parabelsehne MN mit dem Scheitelpunkte ihres zugehörigen Durchmessers AP ein Sehnendreieck MNA und auf dessen Seite AM wiederum ein anderes MAD construirt, so ist jenes achtmal so groß, als dieses.

Denn aus $DO = \frac{3}{4} AP$ und $RO = \frac{1}{2} AP$ folgt $DR : RO = 1 : 2$ oder $DR = \frac{1}{3} RO$. Also ist Dr. $DRM = \frac{1}{3} ROM = \frac{1}{3} AMP$, und da $ARD = MRD$ u. $ANP = AMP$, auch Dr. $MDA = \frac{1}{8} MAN$.

Fig. 150 14. Der Flächenraum S eines Parabel-Segments AMN beträgt zwei Drittel des auf der Sehne MN errichteten, das ganze Segment einschließenden, Parallelogramms $MNSU = P$.

Denn denkt man sich eine unbestimmte Menge von Sehnendreiecken (nach L. 13) über einander construirt, so erhält man als Summe der einzelnen Dreiecke, welche den Flächenraum des Parabelsegments um so genauer darstellt, je größer die Anzahl (n) ihrer Glieder angenommen wird:

$$S = AMN + 2.\frac{1}{8} AMN + 4.\frac{1}{64} AMN + 8.\frac{1}{512} AMN \ldots$$

$$= AMN\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \text{etc.} \ldots + \frac{1}{4^{n-1}}\right)$$

d. i. (nach 137. I) $= AMN \cdot \left(\frac{1 - \frac{1}{4^n}}{1 - \frac{1}{4}}\right)$, und wenn $n = \infty$ gesetzt wird:

$$s = \tfrac{4}{3} AMN = \tfrac{2}{3} P.$$

358. Aufgaben über die Parabel.

1. Eine Parabel zu construiren, wenn ihr Parameter p gegeben ist. Fig. 149

I. Nach der Gleichung $y^2 = px$ oder $x : y = y : p$ (354) schneide man eine beliebige Menge von Abcissen AP, AP'.... auf der angenommenen Achse AX ab, errichte die Senkrechten PM, P'M'.... und beschreibe über jeder, um p vermehrten Abcisse (als Durchmesser) einen Kreis, so muß derselbe (267 L. 8) die zugehörige Senkrechte in zwei Punkten so durchschneiden, daß $AP : PM = PM : p$.

II. Nach der Definition der Parabel (357) ziehe man senkrecht durch die Achse AX eine Linie KL und trage in einem Abstande $\frac{1}{2}p$ von derselben den Brennpunkt F ab. Werden nun durch beliebige Punkte P, P'.... der Achse Senkrechte gezogen und durch die Längen GP, GP'.... als Radien aus F geschnitten, so erhält man Punkte der Curve, weil FM oder FN = GP = KM.

III. Man errichte im Scheitel A eine Senkrechte, nehme auf derselben einen beliebigen Punkt C und ziehe CF, so wird die durch CF senkrecht gezogene CT, wenn man CM = CT abträgt, einen Punkt der Parabel geben.

2. An einen Punkt M der Parabel eine Tangente zu ziehen. Fig. 149

Man halbire (nach L. 3) den Winkel, welchen Zuglinie und Abstandsperpendikel an M bilden.

3. Von einem, außer der Parabel liegenden, Punkte V Tangenten an sie zu ziehen. Fig. 149

Man beschreibe mit der Linie VF einen Bogen, welcher die Richtungslinie der Parabel in K und Q schneidet, und halbire die Winkel FVK u. FVQ, so sind (nach L. 3) VM und VR Berührungslinien der Curve.

4. Richtungslinie und Brennpunkt einer Parabel zu bestimmen, wenn zwei Punkte derselben, A und M, und zugleich an einem, die Tangente AU und der Durchmesser AT gegeben ist. Fig. 150

Man verbinde A mit M, ziehe MP der Tangente parallel, halbire sie in O, nehme $AV = \frac{1}{4}AP$ und construire das Parall. VPOD, so ist D (nach L. 12) Scheitelpunkt für die Sehne

AM. Wird nun an D eine zweite Tangente gelegt und wie in A, unter dem Winkel, welchen Tangente und verlängerter Durchmesser bilden, eine Linie gezogen, so schneiden beide, DF und AF, einander (nach L. 3) im Brennpunkte F; endlich bestimmt man KL leicht durch AG = AF.

Fig. 150 5. Den Parameter einer Parabel zu finden, wenn irgend eine Sehne MN nebst dem Scheitelpunkte A derselben gegeben ist.

Man halbire MN in P, ziehe AP und AM, dann aus O, wenn $PO = \frac{1}{2}PM$, und aus V, wenn $AV = \frac{1}{4}AP$, Parallelen nach D, und endlich an A und D Tangenten, so findet sich der Brennpunkt F und der Punkt G, also auch $FE = \frac{1}{2}p$, wie in A. 4.

Fig. 151 6. Zu zwei gegebenen Linien p und q zwei mittlere Proportionalen zu construiren.

Aus der Gleichung $p:y = y:x = x:q$ folgen (1) $y^2 = px$ und (2) $x^2 = qy$ als Ausdrücke zweier Parabeln, die man aus einem gemeinschaftlichen Anfangspunkte A auf den rechtwinklichten Coordinatenachsen AX, AY, (nach A. 1) construiren möge. Dann ist für ihren Durchschnittspunkt M:

$$(1)\ MP^2 = p.AP \qquad (2)\ MQ^2 = q.AQ,$$

übereinstimmend mit den obigen Gleichungen, also $x = AP$ und $y = AQ$.

Viertes Kapitel.

Die Ellipse.

359. **Kegelschnitt der Ellipse.** Denkt man sich einen Kegel von einer Ebene völlig geschnitten, so bildet der gemeinschaftliche Durchschnitt der Kegelfläche und der Ebene eine in sich selbst zurücklaufende Curve, der man den Namen **Ellipse** beigelegt hat.

360. **Gleichung der Ellipse.** Um diese Curve Fig. 152
vermittelst rechtwinkliger Coordinaten durch x und y auszudrücken, denke man sich die Durchschnittsebene AMB von der senkrechten Ebene des Scheitelwinkels GKB, und beide wiederum von einer, zur Achse des Kegels senkrechten Ebene CMD geschnitten. Der dadurch entstehende Kreis und AMB schneiden sich in der auf AB senkrecht stehenden Linie MP. Nun ist aber

(1) $CP:PM = PM:PD$ oder $CP.PD = PM^2$.

(2) $AP:PC = AB:BG$ oder $PC = \frac{AP.BG}{AB}$

(3) $BP:PD = AB:AF$, oder $PD = \frac{BP.AF}{AB}$

also (4) $PM^2 = \left(\frac{AP.BG}{AB}\right)\left(\frac{BP.AF}{AB}\right) = \left(\frac{AF.BG}{AB}\right)\left(\frac{AP.BP}{AB}\right)$.

Wird $AB = 2a$, $AP = x$, $PM = y$, und $\left(\frac{AF.BG}{AB}\right) = p$ gesetzt, so erhält man

(5) $y^2 = p.\frac{x(2a-x)}{2a} = px - \frac{p}{2a}x^2$,

also eine Gleichung von derjenigen Form, wodurch überhaupt die zweite Art der Curven zweiter Ordnung (nach 352) characterisirt wird. Der als vierte Proportionale zu AB, BG und AF von dem Scheitelwinkel GKB und der Länge der beiden Schenkel KA, KB abhängige constante Werth p wird **Parameter** der Ellipse genannt. Man kann ihn

$$(4)\quad GM = \sqrt{a^2 + 2\sqrt{(a^2-b^2)}\,t + \left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)t^2} =$$

$$a^2 + \sqrt{\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)}\,t$$

also $FM + GM = 2a = AB$.

Fig. 154 II. Denkt man ſich die rechtwinkligen Coordinaten der Ellipſe in ſchiefwinklige übergehend, aber den Mittelpunkt wiederum als Anfangspunkt derſelben, ſo ſind (nach 344, III.) die Werthe

$$x = t\cos.\alpha + u\cos.\beta \quad \text{und} \quad y = t\sin.\alpha + u\sin.\beta$$

in die Gleichung $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ oder $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ zu ſubſtituiren, und dieſe wird dadurch:

$$\left.\begin{array}{l}(a^2\sin.\beta^2 + b^2\cos.\beta^2)u^2 + (a^2\sin.\alpha^2 + b^2\cos.\alpha^2)t^2 \\ +\,2\,(a^2\sin.\alpha.\sin.\beta + b^2\cos.\alpha.\cos.\beta)ut\end{array}\right\} = a^2b^2$$

Sollen nun die neuen Coordinaten eben ſo, wie die vorigen, einander gegenſeitig halbiren und dadurch ebenfalls zu Durchmeſſern der Ellipſe werden, ſo muß auch die vorſtehende Gleichung eine ſolche Geſtalt annehmen, daß man allgemein $u = \pm\sqrt{f(t)}$ und $t = \pm\sqrt{f(u)}$ finde. Dieß kann aber nur geſchehen, wenn der Coefficient von $ut = o$ iſt, eine Bedingung, welcher ſich durch unzählige Annahmen für α und β genügen läßt, indem jeder beliebige Werth der einen Größe den zugehörigen der andern beſtimmt. Es giebt alſo auch eine unbegränzte Menge von Coordinaten-Syſtemen ſolcher zuſammengehöriger oder conjugirter Durchmeſſer der Ellipſe, von welchen der rechtwinklige (wofür $\alpha = o$ und $\beta = R$) nur als ein ſpecieller Fall anzuſehen iſt. Zieht man durch das Centrum der Ellipſe eine willkührliche Gerade LM, ſo wird nach Obigem die Lage des conjugirten Durchmeſſers HK gegen CB durch die Gleichung $\text{tang.}\,\beta = -\frac{b^2}{a^2}\,\text{cotg.}\,\alpha$ beſtimmt.

Fig. 153 363. Lehrſätze über die Ellipſe. Eben ſowohl wie auf eine Gleichung der Ellipſe läßt die Unterſuchung über die Eigenſchaften dieſer Curve ſich auf eine rein-geometriſche Definition derſelben gründen, indem man dar-

unter eine krumme Linie von der Beschaffenheit versteht: „daß die Summe der Entfernungen (Zuglinien) eines jeden ihrer Punkte, M, von zwei in der nämlichen Ebene liegenden Punkten, F und G, (den Brennpunkten) einer gegebenen Linie AB gleich sei.“ Jede Linie Hn, die eine andere LM und zugleich sämmtliche, ihr parallel gezogene, Sehnen zu halbiren vermag, nennt man Durchmesser, und Hn und LM, wenn sie gegenseitig diese Eigenschaft besitzen, conjugirte Durchmesser der Ellipse, — Der, durch die Brennpunkte führende, Durchmesser AB heiße die große, und ein senkrecht durch den Mittelpunkt C gelegter die kleine Achse der Curve. Außer der (aus der Bedingung $FA + GA = FB + GB$) unmittelbar einleuchtenden Wahrheit, daß die Scheitelpunkte A, B, der Curve gleichweit vom Mittelpunkte C entfernt liegen, ergeben sich aus der obigen Definition der Ellipse folgende Theoreme. Fig. 153

1. Jeder Durchmesser wird im Mittelpunkte der Ellipse halbirt.

Denn angenommen, daß $CM > CL$, also etwa $CQ = CL$, so wäre Dr. $FQG = FLG$, also $FQ + GQ = FL + GL = FM + GM$, welches unmöglich ist.

Zusatz. Der größte unter allen Durchmessern der Ellipse ist die große Achse, weil $LM < (MF + FL$, also auch $< AB$.

2. Die senkrecht auf der großen Achse stehenden Sehnen der Ellipse werden von derselben halbirt. Fig. 153

Denn angenommen, es sei $PM > Pm$, also etwa $PR = Pm$, so wäre wegen der Congruenz der Dreiecke $GZ + ZF = Gm + mF$ und nach der Def. der Ell. ebenfalls $= GM + MF$, welches unmöglich ist.

3. Die Endpunkte der kleinen Achse sind um die halbe Länge der großen Achse von den Brennpunkten entfernt. Fig. 153

Denn aus $AB = GD + DF = 2DF$ folgt $DF = \frac{1}{2}AB$.

4. Der Abstand FG der Brennpunkte ist mittlere Proportionale zwischen der Summe und Differenz der beiden Achsen. Fig. 153

Denn aus $CF^2 = DF^2 - CD^2 = CB^2 - CD^2 = (CB + CD)(CB - CD)$ folgt

$(CB+CD):CF = CF:(CB-CD)$ oder $(AB+DE):GF = GF:(AB-DE)$.

Fig. 153 5. Die halbe kleine Achse ist mittlere Proportionale zwischen den Abscissen AF, FB der großen Achse zu beiden Seiten eines Brennpunkts.

Denn es ist $CD^2 = FD^2 - FC^2 = (FD+FC)(FD-FC)$ und da $FD = AC$ ist, $CD^2 = AF.FB$, oder $AF:CD = CD:FB$.

Fig. 153 6. Die große Achse verhält sich zum Abstande der Brennpunkte, wie die Abscisse CP eines Ellipsenpunktes M zum Unterschiede der zugehörigen Zuglinie und der halben großen Achse.

Denn es ist (267 L. 6, Z. II):

(1) $(GM+MF):GF = (GP-FP):(GM-MF)$ oder

(2) $AB:GF = \frac{1}{2}(GP-FP):\frac{1}{2}(GM-MF)$, und wenn $GP = GC+CP$, $FP = CF-CP$, und $GM-FM = (GM+MF)-2MF = 2CB-2FM$ gesetzt wird:

(3) $AB:GF = CP:(CB-FM)$.

Fig. 153 7. Wenn man mit der halben großen Achse CB einen Kreis um die Ellipse beschreibt und die Ordinate PM bis zu demselben verlängert, so verhalten sich die zusammengehörigen Ordinaten von Kreis und Ellipse zu einander, wie die große und kleine Achse der letzteren.

Denn es ist (nach L. 6):

(1) $CB-FM = \frac{GF.CP}{AB}$ oder $FM = CB - \frac{GF.CP}{AB}$,

folglich

(2) $FM^2 = CB^2 - 2.\frac{CB.GF.CP}{AB} + \frac{GF^2.CP^2}{AB^2}$

Dann ist

(3) $(CF-CP)^2 = FP^2 = CF^2 - 2\,CP.CF + CP^2$.

Also findet man durch Subtraction:

(4) $FM^2 - FP^2 = PM^2 = (CB^2 - CP^2) - \left(CF^2 - \frac{GF^2.CP^2}{AB^2}\right)$.

und da $CB^2 - CP^2 = M'P^2$ und $GF^2 = 4\,CF^2$ ist:

(5) $PM^2 = M'P^2 - CF^2\left(\frac{AB^2 - 4CP^2}{AB^2}\right) = M'P^2 - CF^2\left(\frac{CB^2 - CP^2}{CB^2}\right)$

mithin (6) $PM^2 = M'P^2\left(1-\frac{CF^2}{CB^2}\right)$ oder $\frac{PM}{PM'} = \frac{CD}{CB} = \frac{ED}{AB}$.

Zusatz. Zusammengehörige Ordinaten der Ellipse und des umschriebenen Kreises stehen in dem nämlichen Verhältniß zu einander. Denn aus $DE:AB = MP:M'P = NF:N'F$ folgt, daß $MP:NF = M'P:N'F$.

8. Das Quadrat der Ordinate PM verhält sich zum Producte (Rechtecke) der Achsenabschnitte AP, PB, wie das Quadrat der kleinen zu dem der großen Achse. Fig. 153

Denn da (nach L. 7) $MP^2:M'P^2 = DE^2:AB^2$ und (nach 267 L. 7) $M'P^2 = AP.PB$, so folgt, daß $MP^2 : AP.PB = DE^2:AB^2$.

9. Werden die Abscissen auf der kleinen Achse genommen, so verhält sich das Quadrat der Ordinate HS zu dem Producte (Rechtecke) der Achsenabschnitte DS, ES, wie das Quadrat der großen zu dem der kleinen Achse. Fig. 153

Denn beschreibt man mit CD als Radius einen Kreis in der Ellipse, so ist

(1) $DS.ES = WS^2 = DC^2 - CS^2$.

(2) $DE^2:AB^2 = HV^2:AV.VB = CS^2:(AC-VC)(AC+VC) = CS^2:(AC^2-VC^4)$. Daraus ergibt sich

(3) $VC^2 = AC^2 - \frac{AB^2.CS^2}{DE^2} = AB^2\left(\frac{1}{4}-\frac{CS^2}{DE^2}\right) = \frac{AB^2}{DE^2}(CD^2-CS^2)$

und mit Beziehung auf Gleichung (1):

(4) $VC^2 = \frac{AB^2}{DE^2}.DS.ES$ oder $\frac{HS^2}{DS.ES} = \frac{AB^2}{DE^2}$.

10. Wenn man durch die Punkte W und H', in welchen ein Radius CH' die in und um Ellipse beschriebenen Kreise trifft, Linien senkrecht zu deren Achsen zieht, so schneiden diese einander in dem Punkte H der Ellipse. Fig. 153

Denn aus der Aehnlichkeit der Dreiecke CH'V und WCS folgt, daß $CH':H'V = WC:CS$ oder $CH':CW = H'V:HV$, welches (nach L. 7) Eigenschaft eines Ellipsenpunktes ist.

11. Eine gerade Linie, welche den, am Ellipsenpunkte M von der einen Zuglinie mit der Verlängerung der anderen Fig. 153

gebildeten, Winkel FMI halbirt, ist Tangente an diesem Punkte.

Denn angenommen, es sei MI = MF, und die den W. FMI halbirende Linie könne außer M noch irgend einen Punkt R mit der Ell. gemein haben, so wäre einerseits GR + RS = AB, und andernseits GR + RI > GI, welches unmöglich ist, da GI = GM + MF = AB.

Fig. 154 12. Die Punkte M und M' der nämlichen Ordinate für Ellipse und umschriebenen Kreis haben einerlei Subtangente PT.

Denn man ziehe an M' die Tangente M'T, verbinde T mit M, und nehme an, MT sei keine Tangente der Ellipse, sondern schneide dieselbe noch in einem zweiten Punkte N, so wäre nach L. 7, wenn die Ordin. QN in N' den Kreis antrifft, MP : M'P = NQ : N'Q, welches (265 L. 1) unmöglich ist, weil N' nicht in der Geraden M'T liegen kann.

Fig. 154 13. Die, einem Abscissenpunkte P zugehörige Subtangente PT ist vierte Proportionale zur Abscisse CP und den beiden Abschnitten der großen Achse.

Denn es ist CP : PM' = PM' : PT, oder CP . PT = M'P² = AP . PB, also CP : AP = PB : PT.

Fig. 154 14. Die Subnormale PW eines Ellipsenpunktes M verhält sich zur Abscisse CP, wie das Quadrat der kleinen zu dem der großen Achse.

Denn aus $WP : PM = PM : PT$ folgt $WP = \frac{PM^2}{PT}$

$$= \frac{PM^2 \cdot CP}{AP \cdot PB} \quad (1$$

und da (nach L. 8) $PM^2 = \frac{DE^2}{AB^2} AP \cdot BP$, so ist:

$$WP = \frac{DE^2}{AB^2} CP \text{ oder } WP : CP = DE^2 : AB^2.$$

Fig. 154 15. Jeder Durchmesser ML der Ellipse halbirt die, der Tangente MT parallel gezogenen Sehnen.

Sei do eine solche Sehne, und d'o' die entsprechende des umschriebenen Kreises, so müssen beide, weil dc : d'c = ov : o'v, im Punkte S convergiren. Nun ist PT : VS = PM : VO =

PM′ : VO′ (§. 7 Zuſ.) folglich Dr. PM′T ähnlich Dr. VO′S und SO′ parallel TM′, weshalb der Radius CM′ zur Kreisſehne d′o′ ſenkrecht ſtehen und dieſelbe in x′ halbiren muß. Es verhält ſich aber wegen Aehnlichkeit der Dreiecke:

$$CM' : CZ' = CT : CS = CM : CZ,$$

woraus folgt, daß Dr. CMM′ u. CZZ′ ähnlich, alſo MM′ und ZZ′ parallel ſind. Da nun Z′ die Kreisſehne d′o′ halbirt, muß auch Z die Sehne do der Ellipſe halbiren: denn dx : xo = d′x′ : x′o′.

16. Der Flächenraum einer Ellipſe verhält ſich zu dem eines umſchriebenen Kreiſes, wie die kleine zur großen Achſe. Fig. 153

Man ziehe durch beliebige Punkte der großen Achſe Sehnen Hh, Oo.... bis an den umſchriebenen Kreis und verbinde die Endpunkte derſelben in beiden Curven, ſo entſtehen zwei eingeſchriebene Polygone DOHAho... und D′O′H′Ah′o′..., deren einzelne correſpondirende Ordinatenabſchnitte, wie VKOH und VKO′H′ ſich (nach 275 §. 4) zu einander verhalten, wie $\frac{1}{2}(KO + VH) : \frac{1}{2}(KO' : VH') = KO : KO' = DE : AB$.

Bezeichnet man die Ordinatenabſchnitte des Ellipſenpolygons mit p, q, r... und die zugehörigen des Kreispolygons mit P, Q, R...., mithin den Flächenraum der Ellipſe, f, mit $2(p+q+r....)+z$ und den des Kreiſes, F, mit $2(P+Q+R...)+Z$, ſo iſt nach Vorſtehendem:

$$\frac{2(p+q+r+\text{etc.})}{2(P+Q+R+\text{etc.})} = \frac{f-z}{F-Z} = \frac{p}{q} = \frac{DE}{AB}$$

$$\text{oder } \frac{f}{DE} - \frac{z}{DE} = \frac{F}{AB} - \frac{Z}{AB}.$$

Nimmt man nun die Seitenzahl der Polygone ſo groß an, daß die unbedeutenden Brüche $\frac{z}{DE}$ und $\frac{Z}{AB}$ einander gleich geſetzt werden dürfen, ſo erhält man endlich $f : DE = F : AB$ oder $f : F = DE : AB$.

Zuſatz. Der Flächenraum einer Ellipſe wird alſo ausgedrückt durch $f = \frac{b}{a} \cdot a^2\pi = ba\pi$.

364. Aufgaben über die Ellipſe.

1. Eine Ellipſe zu conſtruiren, wenn ihre beiden Achſen gegeben ſind. Fig. 153

I. Man errichte ſenkrecht auf der Mitte der großen Achſe die halbe kleine CD; und trage aus D auf jener die Länge CA nach F und G ab; dann beſchreibe man aus dem Brennpunkte F mit beliebigen Radien FM, FH,.., die aber kleiner, als AB genommen werden müſſen, und eben ſo aus G mit den Längen GM, GH,..., welche jene Radien zu AB ergänzen, Kreisbogen, die einander in den Punkten M, m... H, h... ſchneiden, ſo gehören dieſelben (nach der Definition) der Ellipſe an.

II. Man beſchreibe über der großen Achſe einen Kreis, ziehe beliebige Ordinaten VH', KO', PM'..., und theile eine jede nach dem Verhältniß DE:AB, ſo ſind (nach L. 7) H, O, M... Punkte der geſuchten Ellipſe. Jene Theilung geſchieht nach Andeutung von Fig. 50.

III. Man beſchreibe aus C mit den beiden halben Achſen zwei Kreiſe, ziehe beliebige Radien, wie CH' und aus den Endpunkten W und H' Senkrechte auf den beiden Achſen, ſo iſt der Durchſchnittspunkt H derſelben (nach L. 10) ein Punkt der Ellipſe. Durch Verbindung einer hinreichenden Anzahl ſolcher Punkte entſteht dann die Curve.

Fig. 153 2. An einen Punkt M der Ellipſe eine Tangente zu ziehen.

Man verlängere die größere Zuglinie GM und halbire den Winkel FMI, ſo iſt (L. 11) MT die geſuchte Berührungslinie.

Fig. 154 3. Von einem außer der Ellipſe liegenden Punkte U an dieſelbe Tangenten zu ziehen.

Man verbinde U mit dem nächſten Brennpunkte F, beſchreibe mit der Länge UF als Radius einen Kreis aus U, und einen zweiten mit der Länge AB als Radius aus G, ſo ſchneiden beide einander in zwei Punkten I und I', durch deren Verbindung mit G man die Berührungspunkte M und K erhält. Denn es iſt MI = MF u. KI' = KF, ſo wie UI = UF = UI', folglich UM oder UK eine Halbirungslinie des W. FMI oder FKI', und deshalb (nach L. 11) Tangente der Ellipſe.

Fig. 153 4. Eine Ellipſe zu conſtruiren, wenn außer ihrer großen Achſe AB nur ein Punkt H derſelben gegeben iſt.

Man ziehe durch H zwei Linien HV, HS, die eine ſenkrecht r Achſe AB, die andere ihr parallel, und verbinde den Punkt wo der umſchriebene Kreis von VH getroffen wird, mit dem

Mittelpunkte C der großen Achse, so ist (L. 10) CW = CD die kleine Achse der Ellipse, und diese (nach A. 1) bestimmt.

5. Eine Ellipse zu construiren, wenn die große Achse AB und eine Tangente RT derselben gegeben sind. Fig. 158

Man construire über AB einen Kreis, ziehe aus T an denselben die Tangente TM', und M'P senkrecht zu AB, so ist M ein Punkt der Ellipse, und diese (nach A. 4) bestimmt.

6. Eine Ellipse zu construiren, wenn ein Brennpunkt und irgend ein Durchmesser LM gegeben sind. Fig. 153

Man ziehe von F durch die Mitte C des Durchmessers eine Linie, mache auf derselben CG = CF, und verbinde F und G mit M, so giebt FM + GM die große Achse AB, wodurch die Ellipse (nach A. 1) bestimmt ist.

Fünftes Kapitel.

Die Hyperbel.

365. Kegelschnitt der Hyperbel. Wird ein Kegel von einer Ebene dergestalt geschnitten, daß die verlängerte Durchschnittsebene ebenfalls den Scheitelkegel HKL trifft, so entstehen zwei von einander gesonderte krumme Linien, die den Namen Hyperbel führen. Fig. 155

366. Gleichung der Hyperbel. Man denke sich durch die Winkelebene des Kegels LKH die Durchschnittsebene BPM senkrecht gelegt, und beide von einer dritten zur Achse senkrecht stehenden Ebene DMC geschnitten, so schneiden der dadurch erzeugte Kreis und die Hyperbel einander in den Punkten M, m. Da nun die Linie Mm senkrecht auf DC und AP steht, so ist: Fig. 155

(1) CP:PM = PM:PD oder CP.PD = PM^2.

(2) AP:PC = AB:BG oder $PC = \frac{AP.BG}{AB}$

(3) BP:PD = AB:AF oder $PD = \frac{BP.AF}{AB}$.

also (4) $PM^2 = \left(\frac{AP.BG}{AB}\right)\left(\frac{BP.AF}{AB}\right) = \left(\frac{AF.BG}{AB}\right)\left(\frac{AP.BP}{AB}\right)$.

Setzt man $BB = 2a$, $AP = x$, $PM = y$, u. $\frac{AF.BG}{AB} = p$, so erhält man

(5) $y^2 = p.\frac{x(2a+x)}{2a} = px + \frac{p}{2a}x^2$

als analytischen Ausdruck der Hyperbel. Diese Gleichung unterscheidet sich von derjenigen der Ellipse nur durch das Zeichen des zweiten Gliedes und stellt (nach 352) die dritte Art von Curven der zweiten Ordnung dar. Den constanten Werth p, Parameter der Hyperbel genannt, findet man geometrisch oder arithmetisch auf die nämliche Weise, wie bei der Ellipse. (360).

Fig. 156 367. Eigenschaften der Hyperbel. Die Gleichung $y = \pm\sqrt{px + \frac{p}{2a}x^2}$ giebt folgende Eigenschaften der Curve zu erkennen.

1. Da a und p positive Größen sind, so giebt es für alle positive Abscissen auch reelle Ordinaten, für negative hingegen so lange nicht, als $\frac{p}{2a}x^2 < px$ oder $x < 2a$ angenommen wird. Ueberwiegt aber das Glied $\frac{p}{2a}x^2$ so erscheinen wieder für negative Abscissen reelle Ordinaten, wie groß man jene auch annehmen möge. Folglich besteht die Curve aus zwei getrennten Zweigen.

2. Da mit positiven und negativen Werthen von x auch die zugehörigen der Ordinaten unaufhörlich wachsen, so bilden beide Zweige unbegränzte Curven.

3. Nimmt man die Linie $2a = AB$ unendlich groß an, so nähert sich $\frac{p}{2a}$ dem Werthe o und die Gleichung der Hyperbel derjenigen der Parabel.

4. Die Ordinaten sind stets paarweise von gleicher Läng

vorhanden; also nimmt die Curve zu beiden Seiten der Abscissenlinie einen symmetrischen Lauf.

Anmerkung. Man nennt die Linie AB die Hauptachse, und ihren Mittelpunkt das Centrum der Hyperbel. Denkt man sich mit $AB = 2a$ und dem Parameter p eine Ellipse construirt, so darf jede Ordinate derselben in Bezug auf die Hyperbel als imaginär angesehen, und die halbe kleine oder Neben-Achse $CD = b\sqrt{-1}$ gesetzt werden. Für diesen Werth wird $x = -a$ und die Gleichung der Hyperbel: $-b^2 = -\frac{1}{2}ap$ oder $a : b = b : \frac{1}{2}p$, also allgemein, wenn man p durch b ersetzt:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(ax + x^2).$$

5. Trägt man, wie in der Ellipse, die Länge $CF = \sqrt{a^2 - b^2}$, wegen des Werthes $CD = b\sqrt{-1}$ hier die Länge $\sqrt{a^2 + b^2}$ aus dem Centrum zu beiden Seiten ab, so sind die Ordinaten aus F und G $= \frac{1}{2}p$, wie sich ergiebt, wenn man $y^2 = (\frac{1}{2}p)^2 = \frac{b^4}{a^2} = \frac{2b^2}{a}x + \frac{b^2}{a^2}x^2$ setzt, weil dann $x = -a \pm \sqrt{(a^2 + b^2)}$ gefunden wird.

Anmerkung. Die beiden Punkte F und G heißen auch hier Brennpunkte, und jede von ihnen nach einem Curvenpunkte gezogene Linie, FM oder GM, Zuglinie (Radius vector).

6. Werden beide Achsen, 2a und 2b, gleich angenommen, so erhält man in $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(ax + x^2) = ax + x^2$ die Gleichung der sogenannten gleichseitigen Hyperbel.

368. Coordinaten-Transformation.

I. Soll die Hyperbel auf ihr Centrum bezogen werden, Fig. 150
so setze man $AP = CP - AC$ oder $x = t - a$, und es wird:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2a(t-a) - (t-a)^2) = \frac{b^2}{a^2}(t^2 - a^2).$$

oder $a^2y^2 - bt^2 = a^2b^2$.

Aus dieser Gleichung folgt die Eigenschaft der Hyperbel, daß der Unterschied zwei zusammengehöriger Zuglinien derselben stets ihrer großen Achse gleich ist, durch die nämliche Ableitung der Werthe von FM und GM, wie in 362, I.

Eine andere Coordinatenbeziehung der Hyperbel wählt ihre Asymptoten zu Achsen. Werden nämlich in den Endpunkten der Hauptachse AB die Senkrechten AK, BH = b errichtet und CK, CH gezogen, so ist für eine beliebige Abscisse CP:

$$PR = \frac{b}{a} \cdot x; \qquad PM = y = \frac{b}{a}\sqrt{(x^2 - a^2)}$$

$$\text{also } PR^2 - PM^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 - \frac{b}{a^2}(x^2 - a^2) = b^2,$$

$$\text{oder } (PR - PM)(PR + PM) = b^2, \text{ und hieraus } MR = \frac{b^2}{Mr}$$

Da nun b eine constante, Mr hingegen eine veränderliche Größe ist, so nimmt bei fortgesetztem Wachsen der Abscissen der Abstand RM der geraden CT von der Curve unaufhörlich ab, ohne jedoch jemals völlig verschwinden zu können; weil demnach CT nie die Hyperbel treffen kann, wird sie Asymptote derselben genannt.

Soll nun die Curve auf ihre Asymptoten CT und CU bezogen werden, so ist MV = u, VC = t, und

$$OM : RM = CL : KL, \text{ d. i. } t : RM = \sqrt{(a^2 + b^2)} : 2b.$$

$$VM : rM = CK : KL, \text{ d. i. } u : rM = \sqrt{(a^2 + b^2)} : 2b.$$

Folglich erhält der Ausdruck $MR \cdot Mr = b^2$ die Gestalt

$$b^2 = \frac{2b \cdot t}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{2b \cdot u}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{4b^2 \cdot tu}{a^2 + b^2}$$

und die Gleichung der Hyperbel, auf ihre Asymptoten bezogen, ist:

$$u = \left(\frac{a^2 + b^2}{4t}\right)$$

Fig. 156 369. Lehrsätze über die Hyperbel. Nach der Gleichung der Hyperbel ist sie eine Curve von der Beschaffenheit: „daß der Unterschied der Entfernungen (Zuglinien) eines jeden ihrer Punkte von zwei, in der nämlichen Ebene liegenden, Punkten F und G (den Brennpunkten) einer gegebenen Linie AB gleich sei.“ Der Mittelpunkt C der Verbindungslinie FG sei auch Halbirungspunkt der gegebenen Linie (Hauptachse) AB, und jede durch ihn gelegte Gerade, welche, hinreichend verlängert, die Curve trifft,

werde ein Durchmesser derselben genannt. Beschreibt man aus dem Centrum mit der Länge CF einen Kreis, zieht durch A und B Senkrechte und die Linien HK, IL, so ist eine durch das Centrum gezogene Parallele DE Nebenachse der Hyperbel. Linien, aus C durch die Ecken des Rechtecks HKLI gezogen, heißen Asymptoten der Hyperbel, und bilden bei der gleichseitigen, wofür DE = AB, einen rechten Winkel. Unmittelbar aus der Definition folgt, daß die Curve nicht geschlossen, sondern in zwei Zweigen auf beiden Seiten von C vorhanden ist, da für jeden Punkt auf der Senkrechten DE der Unterschied der Zuglinien DF—DG = o sein würde. Ferner ergeben sich daraus folgende Theoreme.

1. Jeder Durchmesser KN der Hyperbel wird von dem Mittelpunkte derselben halbirt. Fig. 157

Denn angenommen, CK sei größer, als CN, also etwa CL = CN, so folgt aus der Def.

(1) GK — FK = FN — GN, und aus der Congruenz der Dr.

(2) GL — FL = FN — GN, also GK — FK = GL — FL oder

(3) GK — GL = FK — FL, welches bei Halbirung der Grundlinie GF durch KN nur für ein gleichschenkl. Dreieck gültig, für das ungleichschenklige FKG aber unmöglich ist.

Zusatz. Der kleinste unter allen Durchmessern der Hyperbel ist die Hauptachse, weil (nach 249 L. 10) NK > FN — KF; also auch > AB.

2. Die senkrecht auf der Abscissenlinie stehenden Sehnen der Hyperbel werden von derselben halbirt. Fig. 156

Denn es ist weil GP senkrecht auf Mm steht, (nach 267 L. 6, Z. II): (1) $MG^2 - MF^2 = mG^2 - mF^2$, oder (2) (MG + MF) (MG — MF) = (mG + mF) (mG — mF) Weil nun nach der Def. MG — MF = mG — mF, so ist auch (3) MG + MF = mG + mF, und durch Addition (4) MG = mG, also auch MP = mP.

3. Das Quadrat des Abstandes der Brennpunkte ist der Summe der Quadrate beider Achsen gleich. Fig. 156

Denn es ist $GF^2 = 4CF^2 = 4AC^2 + 4AK^2 = AB^2 + DE^2$.

Fig. 156 4. Die halbe Nebenachse ist mittlere Proportionallinie zwischen den Abständen AF und AG der Brennpunkte von einem der beiden Scheitelpunkte A.

Denn es verhält sich, weil CK = CF ein Radius ist, AF : AK = AK : AG.

Fig. 156 5. Die Hauptachse verhält sich zum Abstande der Brennpunkte, wie die Abscisse CP eines Hyperbelpunktes M zur Summe der Zuglinien.

Denn es ist (nach 267 L. 6, Z. II):

(1) $(GM - FM) : (GP - FP) = (GP + FP) : (GM + FM)$

oder (2) $AB : GF = \frac{1}{2}(GP + FP) : \frac{1}{2}(GM + FM)$

und wenn $GP = CP + GC$, $FP = CP - CF$ gesetzt wird.

(3) $AB : FG = CP : \frac{1}{2}(GM + FM)$.

Fig. 156 6. Das Quadrat der Ordinate PM verhält sich zu den Producten (Rechtecken) der Abstände des Abscissenpunktes P von beiden Scheiteln der Hyperbel, wie das Quadrat der Nebenachse zu derjenigen der Hauptachse.

Denn da $GM - FM = AB$, und (nach L. 5)

$GM + FM = \frac{2 \cdot CP \cdot GF}{AB}$, so ist die halbe Summe der Quadrate dieser zweitheiligen Größen.

(1) $GM^2 + FM^2 = \frac{1}{2}AB^2 + 2\frac{CP^2 \cdot GF^2}{AB^2}$.

Nun ist $MP^2 = GM^2 + PG^2$, und $MP^2 = FM^2 + PF^2$, also

(2) $2MP^2 = (GM^2 + FM^2) - (PG^2 + PF^2)$, und deshalb

(3) $MP^2 = \left(\frac{AB^2}{4} + \frac{CP^2 \cdot GF^2}{AB^2}\right) - \frac{1}{2}(PG^2 + PF^2)$,

Da ferner aus der Addition von

$FP^2 = (CP - CF)^2$ und $GP^2 = (CP + CF)^2$ folgt, daß

$\frac{1}{2}(FP^2 + GP^2) = CP^2 + CF^2$, so ist

(4) $MP^2 = \left(\frac{CP^2 \cdot GF^2}{AB^2} - CP^2\right) - \left(CF^2 - \frac{AB^2}{4}\right)$

$= CP^2\left(\frac{GF^2 - AB^2}{AB^2}\right) - \left(\frac{GF^2 - AB^2}{4}\right)$

und da (nach L. 3) $GF^2 - AB^2 = DE^2$ ist,

(5) $MP^2 = DE^2\left(\frac{CP^2}{AB^2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{DE^2}{AB^2}(CP^2 - AC^2)$

$= \frac{DE^2}{AB^2}(CP + AC)(CP - AC) = \frac{DE^2}{AB^2} AP \cdot BP.$

Zusatz. Ist die Hyperbel gleichseitig, so folgt, daß $M'P^2 = AP.BP$, oder daß die Ordinate mittlere Proportionale zwischen den Abständen des Abscissenpunktes von den Scheiteln der Curve ist.

7. Die zusammengehörigen Ordinaten einer beliebigen Hyperbel und einer gleichseitigen derselben Hauptachse verhalten sich zu einander, wie die beiden Achsen der ersten Hyperbel.

Denn da (nach L. 6) $MP^2 : AP.BP = DE^2 : AB^2$, und $M'P^2 = AP.BP$, so folgt, daß $MP : M'P = DE : AB$.

8. Eine gerade Linie, welche den am Hyperbelpunkte M von beiden Zuglinien gebildeten Winkel halbirt, ist Tangente an diesem Punkte. Fig. 157

Denn angenommen, MT könne noch irgend einen Punkt, z. B. R, mit der Hyperbel gemein haben, so wäre, wenn $MI = MF$ gemacht und RI gezogen wird, $RI = RF$, folglich (nach der Def.) $RG - RI = AB = GI$ oder $GI + RI = GR$, welches unmöglich ist.

9. Die Entfernung des Subtangentenpunktes T von einem Brennpunkte F der Hyperbel verhält sich zum Abstande der Brennpunkte, wie die Zuglinie aus jenem zur Summe der Zuglinien des Berührungspunktes. Fig. 157

Denn es ist (nach 267 L. 2) $GT : FT = GM : FM$, also auch $(GT + FT) : FT = (GM + FM) : FM$ oder
$FT : GF = MF : (GM + FM)$.

10. Die Asymptoten CT, CU treffen die Hyperbel nicht, wie weit sie auch verlängert werden. Fig. 156

Denn angenommen, es könne irgend ein Punkt M mit R zusammenfallen, so wäre (nach L. 6) (1) MP^2 (oder RP^2) : $AP.BP = CD^2 : CA^2$, u. wegen Aehnl. der Dr. (2) $RP^2 : CP^2 = AK^2 : CA^2 = CD^2 : CA^2$. Hieraus würde folgen, daß $AP.BP = CP^2$, welches unmöglich ist, weil (3) $AP.BP = (CP - CA)(CP + CA) = CP^2 - CA^2$.

11. Wenn man eine Hyperbelsehne Mm bis zu den Asymptoten verlängert, so ist das Product (Rechteck) aus den Theilen MR und Mr dem Quadrate der halben Nebenachse gleich. Fig. 156

Denn es ist nach vorigem Beweise:

$$(1)\ MP^2 = \frac{CD^2}{AC^2}.AB.BP;\quad (2)\ RP^2 = \frac{CD^2}{AC^2}CP^2;$$

$$(3)\ AB.BP = CP^2 - CA^2.$$

$$\text{Also } (4)\ (RP^2 - MP^2) = \frac{CD^2}{AC^2}(CB^2 - AB.BP)$$

$$= \frac{CD^2}{AC^2}.CA^2 = CD^2.$$

oder (5) $(RP + MP)(RP - MP) = Mr.MR = CD^2$.

Fig. 157 12. Die Theile einer Hyperbel-Secante Zz, welche zwischen der Curve und den Asymptoten liegen, sind einander gleich.

Denn es ist (1) $NS.Ns = hV.hv$, u. wegen Aehnl. der Dr.

$$(2)\ NZ : NS = hZ : hV \text{ oder } NS = \frac{NZ.hV}{hZ};$$

$$(3)\ hz : hv = Nz : Ns \text{ oder } Ns = \frac{Nz.hv}{hz};\ \text{also}$$

$$(4)\ \left(\frac{NZ.hV}{hZ}\right)\left(\frac{Nz.hv}{hz}\right) = hV.hv \text{ oder } \frac{NZ}{hZ}.\frac{Nz}{hz} = 1.$$

Daraus folgt:

$$(5)\ \frac{Nz}{hz} = \frac{hZ}{NZ},\ \text{oder}\ \frac{Nz - hz}{hz} = \frac{hZ - NZ}{NZ},$$

$$\text{d. i. } \frac{Nh}{hZ} = \frac{Nh}{NZ}.$$

Fig. 156 13. Das Product (Rechteck) von zwei beliebigen Asymptoten-Coordinaten, CV.CM, ist eine constante Größe.

Denn es ist wegen Aehnlichkeit der Dreiecke:

$$(1)\ \frac{MV}{Mr} = \frac{CK}{KL};\qquad (2)\ \frac{MO}{MR} = \frac{CL}{KL};\ \text{also}$$

$$(3)\ MV.MO = \frac{CK}{KL}.\frac{CL}{KL}.Mr.MR,\ \text{oder (nach L. 11)}$$

$$(4)\ MV.MO = \frac{CA^2}{(2CD)^2}.CD^2 = \tfrac{1}{4}CA^2.$$

14. Die Segmente einer beliebigen Hyperbel und einer gleichseitigen derselben Hauptachse verhalten sich, wie ihre zusammengehörigen Ordinaten.

Der Beweis nimmt denselben Gang, wie in 365 L. 16. Zieht man nämlich Sehnen durch beliebige Punkte der Abscissenlinie bis zu beiden Curven und verbindet deren Endpunkte, so entstehen eingeschriebene Polygone, deren einzelne Ordinatenabschnitte sich verhalten, wie DE : AB (nach L. 7).

Bezeichnet man die kleineren Trapeze mit p, q, r ..., die größeren mit P, Q, R..., also die von den Curven eingeschlossenen Flächenräume mit $f = 2(p+q+r+\ldots)+z$ und $F = 2(P+Q+R+\ldots)+Z$, so ist

$$\frac{2(p+q+r+\ldots)}{2(P+Q+R+\ldots)} = \frac{f-z}{F-Z} = \frac{p}{q} = \frac{DE}{AB}$$

oder $\frac{f}{DE} - \frac{z}{DE} = \frac{F}{AB} - \frac{Z}{AB}$.

Wird nun die Seitenzahl der eingeschr. Polygone so groß angenommen, daß man die kleinen Brüche $\frac{z}{DE}$ und $\frac{Z}{AB}$ als gleich ansehen kann, so erhält man $f:F = DE:AB$.

370. Aufgaben über die Hyperbel.

1. Eine Hyperbel zu construiren, wenn ihre beiden Achsen gegeben sind. Fig. 156

Man errichte senkrecht im Endpunkte A der Hauptachse die halbe Nebenachse AC, ziehe CK und damit als Radius einen Kreis, so ergeben sich die Brennpunkte F und G. Werden dann aus F mit beliebigen Radien, und aus G mit solchen, die um AB größer sind, als jene, Bogen beschrieben, so müssen dieselben der Definition gemäß einander in Punkten durchschneiden, welche der Hyperbel angehören.

2. An einen Punkt M der Hyperbel eine Tangente zu ziehen. Fig. 157

Man halbire den Winkel FMG der Zuglinie, so ist (nach 369 L. 8) die Halbirungslinie Tangente der Curve.

3. Von einem, außer der Hyperbel liegenden Punkte R eine Tangente an dieselbe zu ziehen. Fig. 157

Man verbinde R mit den Brennpunkten, und beschreibe aus R und G zwei Bogen mit RF und GI = AB, die einander im Punkte I schneiden. Wird dann GI bis zur Hyperbel verlängert, so ist M der gesuchte Berührungspunkt, also RM Tangente. Dieß ergiebt sich (nach 369 L. 8) aus den gleichseit. Dreiecken RFI und MFI, worin der Winkel an der Spitze von RT halbirt wird.

4. Eine Hyperbel zu construiren, wenn außer ihrer Hauptachse nur ein Punkt M derselben gegeben ist.

Man construire (nach A. 1) eine gleichseitige Hyperbel mit der Hauptachse AB, verlängere die Ordinate PM bis zu PM', und suche zu beiden und AB die vierte Proportionale, so ist diese die Nebenachse der Hyperbel und dieselbe (nach A. 1) bestimmt.

157 5. Eine Hyperbel zu construiren, wenn die Brennpunkte F, G, und eine Tangente RT derselben gegeben sind.

Man ziehe aus F durch die Tangente die Senkrechte FI, mache DI = DF und verbinde I mit G, so trifft die Gerade GI die Berührungslinie im Punkte M, der ein Punkt der Hyperbel sein muß, weil GMT = FMT.

Fig. 156 6. Eine Hyperbel zu construiren, wenn ihre Asymptoten und irgend ein Punkt M der Curve gegeben sind.

Man halbire den Asymptotenwinkel durch CP, ziehe durch M auf CP die Senkrechte Rr, und suche (nach 270 A. 6) die mittlere Proportionale zu den Abschnitten MR und Mr, so erhält man (nach 369 L. 11) die Nebenachse DE und dadurch das Rechteck KLIH, womit auch AB und (nach A. 1) die Hyperbel bestimmt ist.

Sechstes Kapitel.

Die ebenen und krummen Flächen.

371. Analytiſche Darſtellung der Flächen. Auf die nämliche Weiſe, wie krumme Linien vermöge des Abſtandes ihrer Punkte von einer gegebenen Geraden, können auch Flächen aller Art durch den Abſtand ihrer einzelnen Punkte von einer gegebenen Ebene beſtimmt, und wenn man einen geſetzlichen Zuſammenhang der Coordinaten dieſer Punkte angeben kann, ebenfalls durch eine Gleichung dargeſtellt werden. Man denke ſich nämlich von einem Fig. 158 beliebigen Punkte L der Oberfläche auf die gewählte Ebene AXY die Senkrechte LM, und von dem Punkte M eine andere MP auf die in dieſer Ebene gewählte Abſciſſenlinie AX gefällt, ſo iſt der Punkt L durch die Coordinaten AP $= x$, PM $= y$, ML $= z$, völlig beſtimmt. Daſſelbe würde von beliebigen anderen Punkten der nämlichen Fläche gelten, welcher L angehört, weshalb eine allgemein zwiſchen x, y, z, Statt habende Beziehung als Gleichung der ganzen Fläche angeſehen werden kann. So iſt, wenn wir einen Punkt L der Kugel auf ihren Mittelpunkt beziehen, $AL^2 = AM^2 + ML^2 = AP^2 + PM^2 + ML^2$ oder $a^2 = x^2 + y^2 + z^2$ die Gleichung der Kugelfläche, weil dieſer Ausdruck von einem jeden ihrer Punkte gilt.

Dieſes Beiſpiel reicht hin, zu zeigen, daß ſo wie eine Gleichung zwiſchen zwei veränderlichen Größen, angedeutet durch $F(x, y) = 0$ oder $y = f(x)$, als arithmetiſcher Ausdruck einer (geraden oder krummen) Linie betrachtet werden konnte, auch eine Gleichung mit drei veränderlichen Größen, alſo begriffen unter der allgemeinen Andeutung $F(x, y, z) = 0$ oder $z = f(x, y)$, als Ausdruck einer (ebenen oder gekrümmten) Fläche angeſehen werden dürfe, deren Beſchaffenheit ſich ebenfalls aus dem arithmetiſchen Zuſammenhange der conſtanten und veränderlichen Größen wird erkennen laſſen, wie es bei den Curven der Fall war. Sollen Punkte der Fläche nach einer ſolchen Gleichung beſtimmt werden, ſo hat man zwei Coordinaten

ihrer Lage und Größe nach willkührlich anzunehmen und den zugehörigen Werth der dritten zu berechnen, wie bei den Curven für willkührliche Werthe der Abscissen correspondirende für die Ordinaten gefunden wurden. So ist die Gleichung einer Kugelfläche, deren Radius = 29 sei:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 841 \text{ oder } z = \sqrt{841 - (x^2 + y^2)}$$

und wenn für einen bestimmten Punkt $x = 12$, $y = 16$ gesetzt wird:

$$z = \sqrt{841 - 400} = \sqrt{441} = \pm 21.$$

Das doppelte Zeichen für z zeigt an, daß die Senkrechte aus M in verschiedenen Richtungen genommen werden soll.

372. Bezeichnung der Lage. Bei Anwendung der arithmetischen Zeichensprache darf man nämlich auch hier nicht unterlassen, die Lage der einzelnen Punkte in Beziehung auf den gewählten Anfangspunkt durch $\pm(x, y, z)$ zu bezeichnen, indem zu den früheren Bestimmungen über $\pm(x, y)$ noch die neue hinzukommt, daß die auf der einen Seite der Ebene ABC liegenden Senkrechten als die positiven, die auf der andern Seite aber als die negativen angesehen werden. Denkt man sich durch den Punkt A, wo die Coordinaten-Achsen AX, AY einander durchkreuzen, noch die dritte AZ, und durch je zwei dieser Achsen Ebenen gelegt, so ist es gleichgültig, welche von denselben zur Beziehungsebene gewählt wird, indem man z. B. auf die Ebene AYZ den Punkt L durch die Senkrechte LN beziehen, und N wiederum durch die Coordinaten AQ, QN bestimmen kann. Die gegenseitig senkrechte Stellung der Ebenen ist, wenn auch die einfachste und bequemste, doch keineswegs nothwendig, sondern jede beliebige Lage derselben, gegen einander gestattet.

373. Intersection der Flächen. Wird in der gegebenen Gleichung einer Fläche, $F(x, y, z) = 0$, eine der veränderlichen Größen, z. B. $z = 0$ gesetzt, also die Dimension der Höhe willkührlich aufgehoben, so erhält man in dem Ausdrucke $F(x, y) = 0$ den Zusammenhang der beiden Coordinaten x und y in der Ebene AXY, d. h. die Gleichung derjenigen Linie, in welcher die Fläche von dieser Ebene geschnitten wird. Eben so findet sich der analy-

tiſche Ausdruck des Durchſchnitts der Fläche und der Ebene AYZ, wenn $x = o$; und derjenige für den Durchſchnitt mit der Ebene AXZ, wenn $y = o$ geſetzt wird. Auf dieſe Weiſe erhält man die ſogenannten drei Hauptſchnitte der Oberfläche, woraus ſich ihre Beſchaffenheit im Allgemeinen bereits beurtheilen läßt. Um dieſe aber näher zu erforſchen, ſetze man x, y, z ſtatt ſie zu annulliren, den conſtanten Größen p, q, r gleich, wodurch man beliebig viele Durchſchnitte der Fläche erhält. So wird z. B., wenn man für x den Werth $p = AP$ ſubſtituirt, die Gleichung $F(p, y, z) = o$, worin nur die veränderlichen Größen y, z geblieben ſind, zur Gleichung der Curve BLC, d. h. des Durchſchnitts der Fläche und einer, in dem Abſtande p der AZY parallel gelegten, Ebene. Wäre hingegen $z = q = AQ$ geſetzt, ſo erhielte man in $F(q, x, y) = o$ den Ausdruck des Durchſchnitts DLE, durch eine der AXY parallele Ebene erzeugt.

Denkt man ſich die Fläche, deren Gleichung $F(x, y, z) = o$ iſt, nicht etwa durch eine ſolche Parallel-Ebene, ſondern durch eine andere (ebene oder krumme) Fläche geſchnitten, die allgemein durch $\varphi(x, y, z) = o$ ausgedrückt werden mag, ſo müſſen alle Punkte ihres Durchſchnitts, als beiden Flächen gemeinſchaftlich, die nämlichen Coordinaten haben, oder es müſſen die veränderlichen Größen in beiden Gleichungen für dieſen beſondern Umſtand als gleichbedeutend angeſehen werden. Eliminirt man alsdann eine derſelben, z. B. z, ſo enthält die neue Gleichung nur die beiden andern x und y und iſt ſomit Ausdruck einer Linie, welche in der Ebene AXY von der Projection des Flächendurchſchnitts gebildet wird.

374. Eintheilung der Flächen. Da man bei der unendlichen Mannigfaltigkeit in der Geſtalt krummer Flächen mit dem höchſt allgemeinen Unterſchiede geſchloſſener und unbegränzter Flächen keine Eintheilung derſelben begründen kann, ſo nimmt man auch hier, wie bei den Curven, das Princip derſelben am zweckmäßigſten von der Beſchaffenheit der Gleichungen her, die nach dem Vorhergehenden als ihr analytiſcher Ausdruck betrachtet werden dürfen. Zunächſt unterſcheidet man demnach algebraiſche

und transcendente Flächen, jenachdem die Gleichungen zwiſchen den Coordinaten algebraiſch ſind, wie $z = \sqrt{x+y}$, oder transcendental, wie $x.y = \sin. z$, von denen jedoch nur die erſten pflegen in Betracht gezogen zu werden. Nach dem Grade, zu welchem ſie ſich durch die Anzahl der Coordinaten-Factoren in den einzelnen Gliedern erheben, beſtimmt man auch die Ordnung der Flächen. So ſtellt die Gleichung $x^2 + xyz + z^2 = a$ eine Fläche der 3ten Ordnung dar, weil eines ihrer Glieder Product aus drei Coordinatenfactoren iſt, die Gleichung $x - 4y^4z^2 = a$ hingegen eine Fläche der 6ten Ordnung, weil $y^4z^2 = y.y.y.y.z.z$.

375. Flächen der erſten Ordnung. Sei die Gleichung zwiſchen x, y, z begriffen unter der allgemeinen Form

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

alſo vom erſten Grade, ſo iſt die von ihr analytiſch dargeſtellte Fläche eine Ebene. Dieß geht daraus hervor, daß die Coordinaten-Ebenen AXY, AXZ, AYZ von ihr nothwendig in geraden Linien geſchnitten werden: denn ſetzt man x, y, z nach einander $= 0$, ſo entſtehen die Gleichungen

$$By + Cz + D = 0: \quad Ax + Cz + D = 0: \quad Ax + By + D = 0,$$

welche (nach 342 Ausdrücke gerader Linien ſind, die in den drei Coordinaten-Ebenen liegen.

376. Flächen der zweiten Ordnung. Die allgemeine Form der Gleichungen vom zweiten Grade zwiſchen x, y, z, wodurch Flächen der nämlichen Ordnung ausgedrückt werden, iſt:

$$Ax^2 + Byz + Cxy + Dy^2 + Exy + Fx^2 + Gz + Hy + Ix + K = 0.$$

Setzt man nun auch hier x, y, z ſucceſſiv $= 0$, ſo entſtehen die Gleichungen:

$$Ax^2 + Byz + Dy^2 + Gz + Hy + K = 0:$$
$$Ax^2 + Cxz + Fx^2 + Gz + Ix + K = 0:$$
$$Dy^2 + Exy + Fx^2 + Hy + Ix + K = 0:$$

wodurch (nach 341 drei Curven der zweiten Ordnung dargeſtellt werden, die in den Ebenen AYZ, AXZ, AXY liegen. Da nun (nach 352 vergl. mit der folgenden Capi-

teln) die Kegelschnitte der Parabel, Ellipse und Hyperbel als die einzigen Curven der zweiten Ordnung erkannt worden sind, so folgt aus den obigen Gleichungen, daß jede Fläche dieser Ordnung auch eine jener drei Curven zum Hauptschnitt haben müsse. In Ansehung der Parallelschnitte folgt das nämliche, wenn man (nach 373) $x, y, z = p, q, r$ setzt. Sind nun alle diese Intersectionen Ellipsen, so muß die Oberfläche eine geschlossene, sind hingegen darunter Parabeln oder Hyperbeln, so muß sie eine unbegränzte sein.

377. Rotationsflächen. Auf die einfachste Weise läßt man krumme Flächen durch die Vorstellung entstehen, daß eine (gerade oder krumme) Linie in gleichbleibendem Abstande sich um eine, als Achse gegebene, Gerade drehe, und pflegt dieser Entstehungsart wegen die von der drehenden Linie erzeugte Oberfläche eine Rotationsfläche zu nennen, wovon die Erzeugung der Kugel durch den rotirenden Halbkreis das nächste Beispiel liefert. Ist uns die Gleichung der erzeugenden Linie in der Gleichung $y = f(x)$ gegeben, so wird sich diejenige der Rotationsfläche, von der Gestalt $z = \varphi(x, y)$, immer ohne Mühe ableiten lassen, indem jeder auf der Achse senkrecht stehender Parallelschnitt ein Kreis sein muß. Sei L ein beliebiger Punkt der Oberfläche, Fig. 159
AB ihre Achse, und AGK die willkührlich angenommene Ordinaten-Ebene, so entsteht, wenn man durch L eine Durchschnittsebene GLK senkrecht zur Achse legt, der Kreis DGEK, worin die Senkrechte $LM = z$, $MP = y$ und $PG = PL = w$ gesetzt werden mag. Dann ist $z^2 = w^2 - y^2$, und wenn der Ausdruck des, mit jeder Abscisse x veränderlichen, Radius $w = f(x)$ gesetzt wird: $z^2 = f(x)^2 - y^2$ oder $z^2 + y^2 = f(x)^2$.

378. Kegel, Cylinder und Kugel. Fig. 159

I. Die nächste Anwendung dieses allgemeinen Verfahrens: die Gleichungen der Rotationsflächen zu erhalten, möge die gerade Linie erfahren, deren allgemeinste Gleichung $w = ax + b$ ist, wenn w die Ordinate PG bezeichnet, der Anfangspunkt aber beliebig in A angenommen ist. Durch Substitution dieses Werthes von w erhält man:

$$z^2 + y^2 = a^2x^2 + 2abx + b^2$$

als Ausdruck der, durch Rotation der Linie HG um AB entstehenden, Kegelfläche.

Fig. 159 II. Eine Cylinderfläche entsteht, wenn die der Achse parallele, Linie GF in gleichbleibendem Abstande um dieselbe sich bewegt. Die Gleichung einer solchen Linie ist aber (nach 345 A. 2) $w = b$, mithin für diesen Fall:

$$z^2 + y^2 = b^2.$$

Fig. 159 III. Um die Gleichung der Kugeloberfläche zu erhalten, hat man, wenn A als Anfangspunkt gewählt und der Radius $CG = a$ gesetzt wird, $w^2 = AP.PB = x(2a-x)$, also:

(1) $z^2+y^2 = 2ax-x^2$ oder $z^2+y^2+x^2=2ax$.

wenn man hingegen die Coordinaten auf den Mittelpunkt C bezieht, so ist $w^2 = a^2 - x^2$, also:

(2) $z^2 + y^2 = a^2 - x^2$ oder $z^2 + y^2 + x^2 = a^2$.

379. Paraboloid, Ellipsoid u. Hyperboloid.

Fig. 160 I. Wählt man zu der erzeugenden Curve der Rotationsfläche eine Parabel GAK, wodurch ein sogenanntes Paraboloid entsteht, so ist (nach 354) $w^2 = px$, und nach Einführung dieses Werthes in die allg: Gleichung:

$$z^2 + y^2 = px$$

Fig. 160 II. Die Gleichung der Oberfläche eines Ellipsoids zu finden, welches durch Drehung einer Ellipse AgBK um ihre Achse erzeugt wird, setze man in Beziehung auf den Scheitelpunkt A (nach 361 L: 4) $w^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax-x^2)$, also:

(1) $z^2+y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax-x^2)$ od. $a^2z^2+a^2y^2+b^2x^2 = 2ab^2x$;

und wenn die Coordinaten auf den Mittelpunkt C bezogen werden, (nach 362) $w^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$, also:

(2) $z^2+y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$ od. $a^2z^2+a^2y^2+b^2x^2 = a^2b^2$.

III. Denkt man durch Rotation einer Hyperbel GAK Fig. 160 um ihre Achse, die Oberfläche eines Hyperboloids erzeugt, so ist in Beziehung auf den Scheitelpunkt A (nach 367 L. 4) $w^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2)$, also:

(1) $z^2+y^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax+x^2)$ od. $a^2z^2+a^2y^2-b^2x^2=2ab^2x$;

und wenn die Hyperbel auf ihren Mittelpunkt bezogen wird, $w^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 + x^2)$, also:

(2) $z^2+y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2+x^2)$ oder $a^2z^2+a^2y^2-b^2x^2=a^2b^2$.

380. Aufgaben über die Lage, Intersection und Berührung der Flächen.

1. Die Projections-Gleichungen einer geraden Linie zu finden, wenn zwei Punkte M′, M″ derselben gegeben sind.

Werden die gegebenen Coordinaten dieser Punkte durch x′, y′, z′; x″, y″, z″; bezeichnet, und die gesuchten Gleichungen der Projectionen in den Ebenen AXY und AZX dargestellt durch $y = ax + b$ und $z = \alpha x + \beta$, so ist

$$y' = ax' + b \quad \text{und} \quad z' = \alpha x' + \beta$$
$$y'' = ax'' + b \qquad z'' = \alpha x'' + \beta$$

also $y' - y'' = a(x' - x'')$ und $z' - z'' = \alpha(x' - x'')$ wodurch a und α bestimmt sind, mithin auch b und β.

2. Die Gleichung einer Ebene zu finden, wenn drei Punkte M′, M″, M‴ derselben gegeben sind.

Sind x′, y′, z′; x″, y″, z″; x‴, y‴, z‴; die Coordinaten der gegebenen Punkte, so werden die Coefficienten der Gleichung $Ax + By + Cz + D = 0$ dadurch bestimmt, daß man die vorstehenden speciellen Werthe an die Stelle von x. y, z setzt und dann die unbekannten Größen A′, B′, C′ (nach 175) sucht, nachdem D durch Division entfernt ist.

3. Die Projectionsgleichungen des Durchschnitts zweier Ebenen zu finden.

Sind $Ax + By + Cz + D = o$ und $A'x + B'y + C'z + D' = o$ die Gleichungen dieser Ebenen, so gelten sie gleichzeitig für die gemeinschaftlichen Punkte, welche ihre Intersection bilden. Eliminirt man z aus beiden, so erhält man

$$(AC' - A'C)x + (BC' - B'C)y + (DC' - D'C) = o$$

also die Gleichung einer geraden Linie, worin die Intersection $M'M''$ sich in der Ebene AXY projicirt. Eben so findet man die Projectionsgleichungen für die Ebenen AXZ und AYZ.

4. Die Bedingungen anzugeben, unter denen zwei Ebenen einander parallel sind.

Sind $Ax + By + Cz + D = o$ und $A'x + B'y + C'z + D' = o$ die Gleichungen beider Ebenen, so können sie nach der Voraussetzung keine Intersection haben. Also müssen auch die Gleichungen, wodurch in A. 3. die Projectionen dieses Durchschnitts dargestellt wurden, verschwinden, was nur durch Annullirung der Coefficienten geschehen kann. Also ist die Bedingung des Parallelismus, daß:

$$AC' - A'C = o; \qquad BC' - B'C = o;$$

oder $A : C = A' : C'$; $B : C = B' : C'$.

5. Die Projectionsgleichung des Durchschnitts einer Ebene und einer Kegelfläche zu finden.

Sei die Gleichung des Kegels in Beziehung auf seinen Scheitel als Anfangspunkt (nach 378 I.)

$$z^2 + y^2 = a^2 x^2$$

und die der Ebene: $Ax = -(By + Cz + D)$, so erhält man durch Elimination von x:

$$A(z^2 + y^2) = a^2 (By + Cz + D)^2,$$

also eine Gleichung des zweiten Grades zwischen x und y, welche unter die allgemeine Form solcher Gleichungen (376) fällt, und demnach eine Parabel, Ellipse oder Hyperbel darstellen muß. Hiernach ist die Projection eines Kegelschnitts wiederum ein solcher.

6. Die Projectionsgleichung des Durchschnitts einer Kugel und einer Ebene zu finden.

Die Gleichungen sind nach 375 und 378:

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ und $Ax + By + Cz + D = o$

und nach Elimination von z^2 bleibt:

$$CR^2 - C(x^2 + y^2) = (Ax + By + D)^2,$$

eine Gleichung des zweiten Grades, welche (da x oder y nicht unbestimmt groß werden können) eine geschlossene Curve, also eine Ellipse, darstellt.

7. Die Bedingungen anzugeben, unter denen ein Paraboloid von einem Kegel berührt wird, wenn die Achsen beider zusammenfallen.

Die Gleichung des Kegels ist (nach 378):

$$z^2 + y^2 = a^2x^2 + 2abx + b^2$$

und die Gleichung des Paraboloids (nach 379):

$$z^2 + y^2 = px.$$

Angenommen, daß beide Flächen einander durchschneiden, so hat man für die Intersectionen, deren im Allgemeinen zwei sein werden:

$$px = a^2x^2 + 2abx + b^2$$

$$\text{oder } x = \left(\frac{p - 2ab}{2a^2}\right) \pm \sqrt{M}$$

wo M eine Function von a, b, p bezeichnet. In dem besondern Falle aber, wo die krummen Flächen einander nur berühren sollen, kann es keinen zwiefachen Werth für x geben; also ist die Bedingung für diesen Fall, daß $M = o$ und

$$x = \frac{p - 2ab}{2a^2} \text{ oder } ax + b = \frac{p}{2a}.$$

8. Die Bedingungen anzugeben, unter denen ein Paraboloid und eine Kugel einander berühren.

Die Gleichungen sind (nach 378 u. 379), wenn der Mittelpunkt der Kugel in einem Abstande $= k$ vom Scheitel der Parabel angenommen wird:

$$(1)\ y^2 + z^2 = px$$
$$(2)\ y^2 + z^2 = a^2 - (k - x)^2$$

Schneiden beide Oberflächen einander, so hat man für die Intersectionen die Gleichung:

$$px = a^2 - x^2 + 2kx - k^2$$

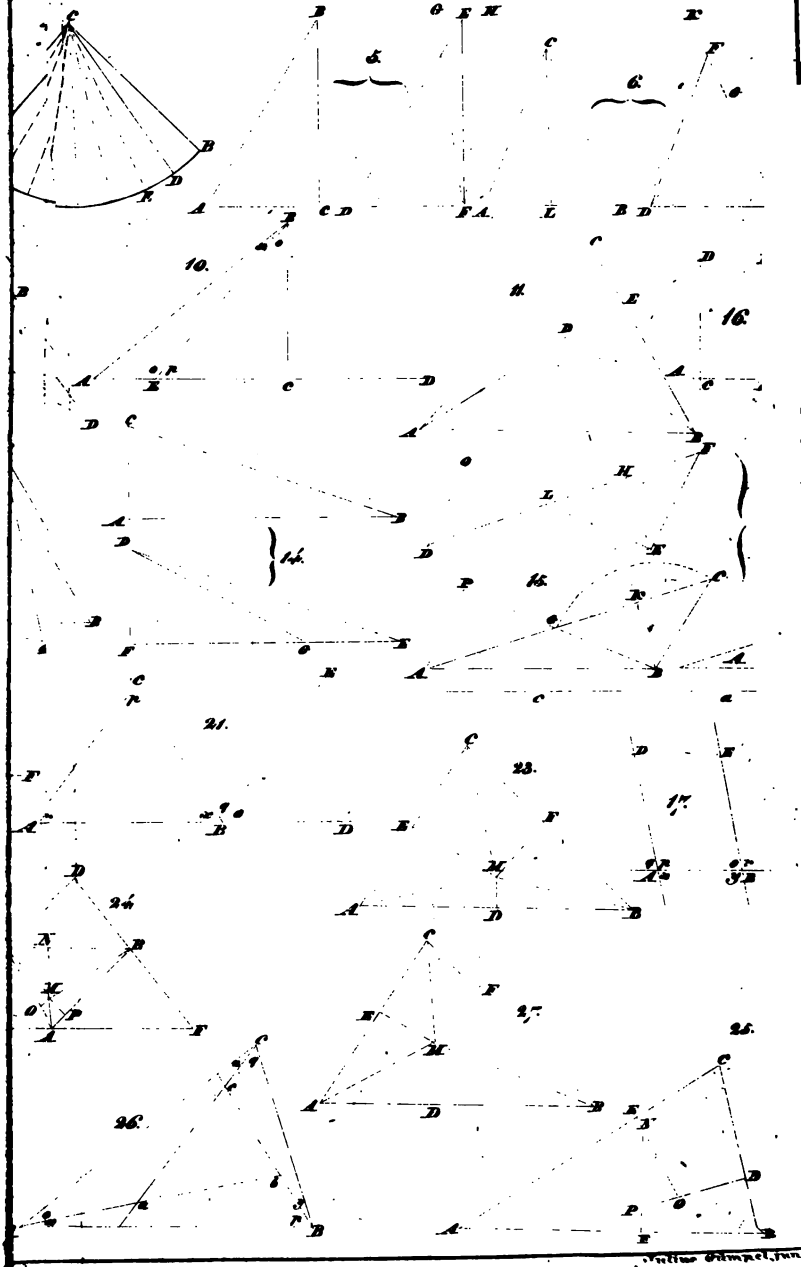
S. 128, Z. 28 l. $\overset{2}{A}x^2$ ſtatt $\overset{1}{A}x^2$.

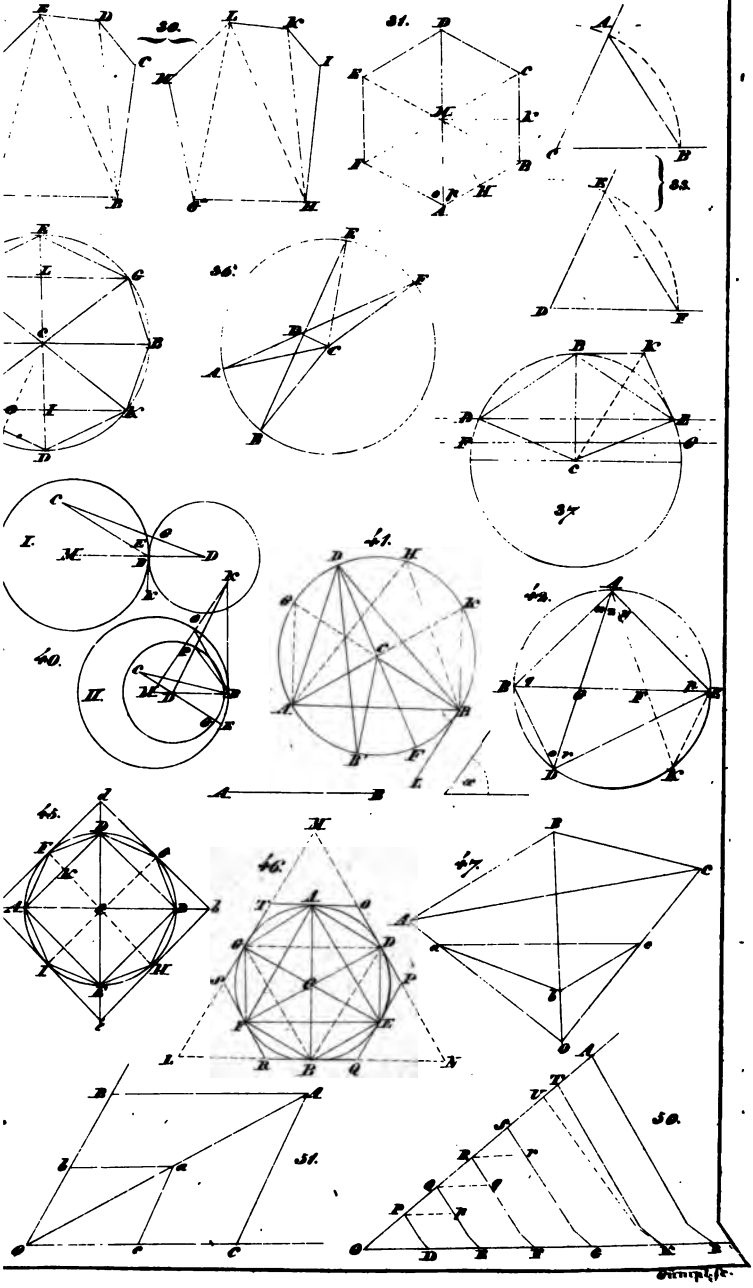
S. 144 Z. 31 l. $= \text{Log.}\left(\frac{1+2z}{1+z}\right)$ ſtatt $+ \text{Log.}$

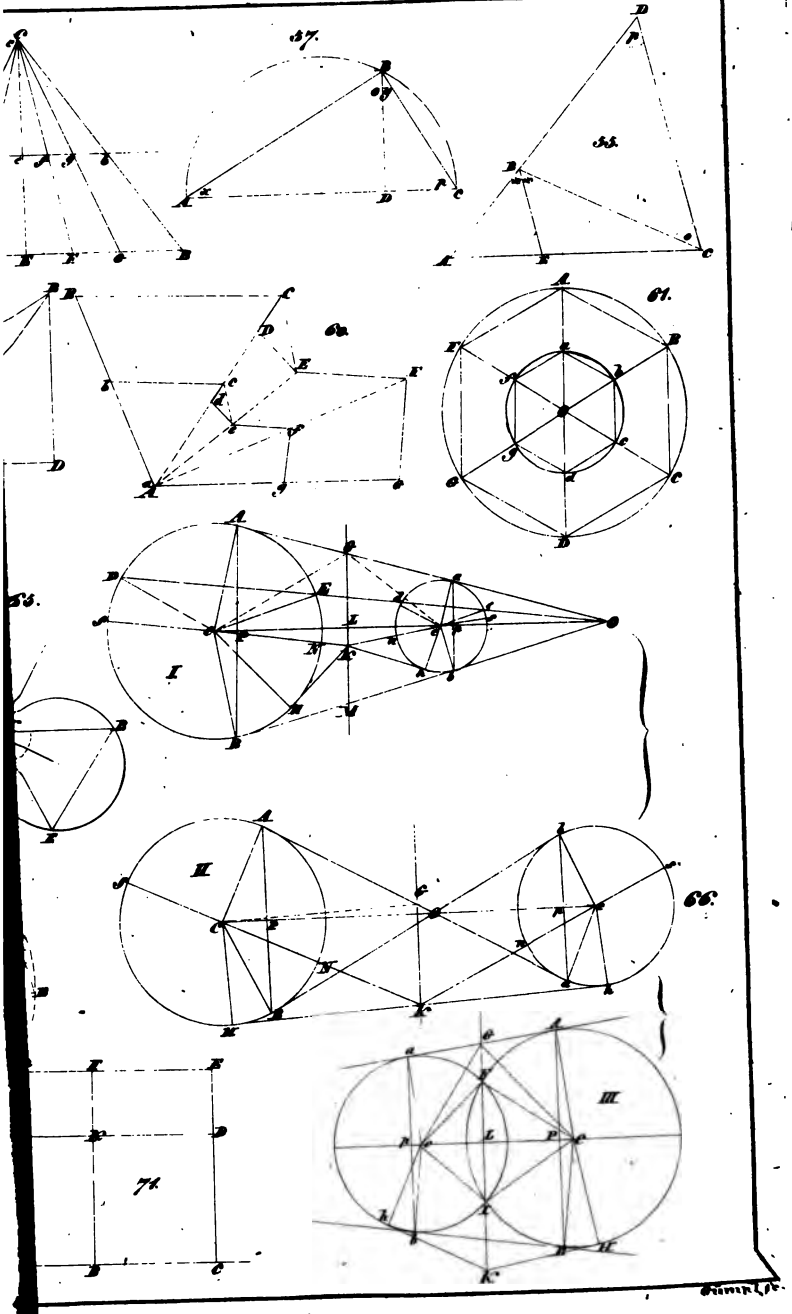
S. 149, Z. 16 l. der benachbarten ſtatt die benachbarten.
S. 152, Z. 6 l. 180^{σ} ſtatt 260°.
S. 157, Z. 34 l. ox^r ſtatt ax^r.
S. 166, Z. 11 l. A ſtatt a.

Z. 17 l. $\overset{3}{\sqrt{a}}$ ſtatt $\overset{3}{\sqrt{}}$.

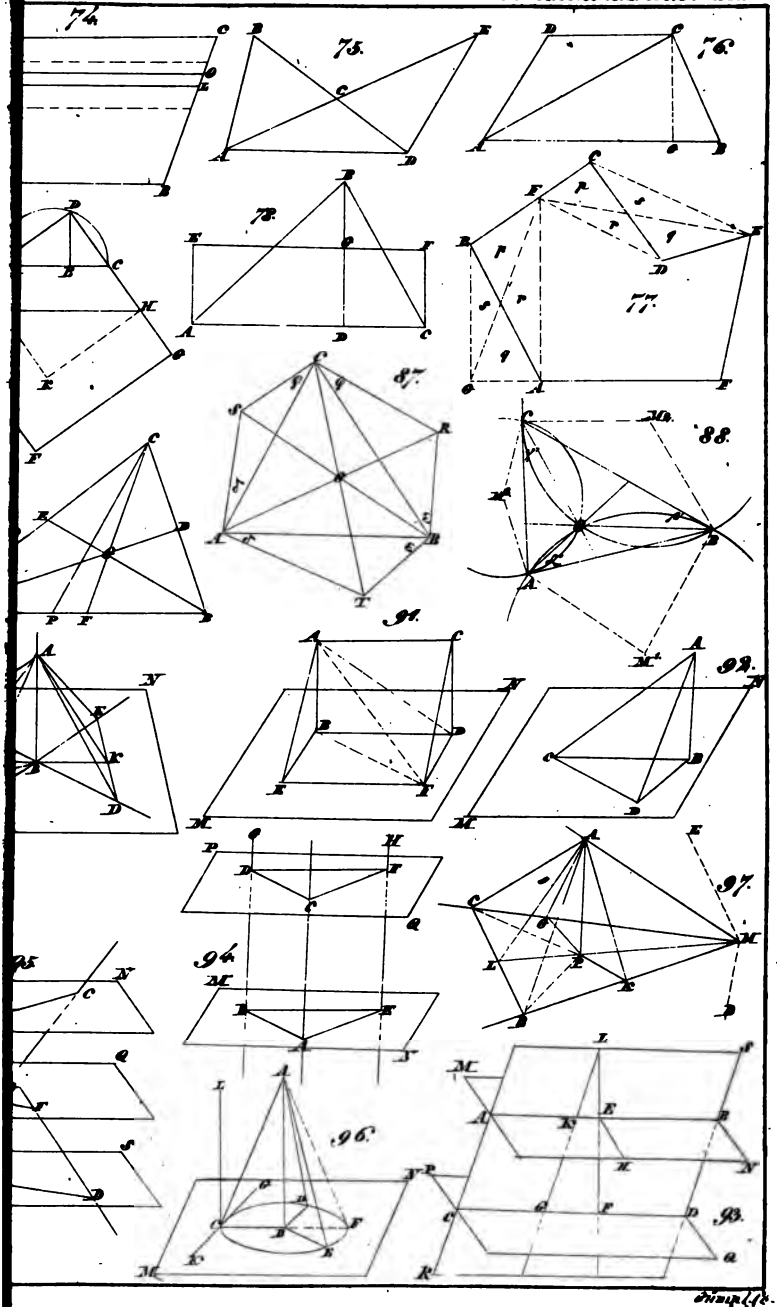
S. 176, Z. 2 l. Nun ſtatt Nur.
S. 180, Z. 35 l. $M'K = x$ ſtatt $M'K + x$.
S. 186, Z. 17 l. Wieviel Bäume jeder Art.
S. 201. Z. 28 l. nie $=$ W. A ſtatt ein $=$ W. A.
S. 203, Z. 21 l. von derſelben gleichweit abſtehenden.
S. 220, Z. 20 l. ebenſowohl ſtatt ebenfalls.
Z. 26 l. zwar ſtatt gar.
S. 225, Z. 20 l. der Summe ſtatt die Summe.
S. 226, Z. 2 l. die Senkrechte CE.
S. 241, Z. 19 l. Durchmeſſer 1 ſtatt C.
S. 245, Z. 13 l. beſtimmt ſtatt beſtimmter.
S. 251, Z. 29 l. cot. γ + cot. α ſtatt cot. α.
S. 255, Z. 10 l. den Angaben ſtatt der Angaben.
S. 266, Z. 22 l. allgemeineren ſtatt allgemeinen.
S. 286, Z. 18 l. Diagonal-Ebenen ſtatt Diagonalen.
S. 291, Z. 3 l. einem innen liegenden Mittelpunkte.
S. 293, Z. 21 l. welche nicht mit dem Centrum in einer Ebene liegen.

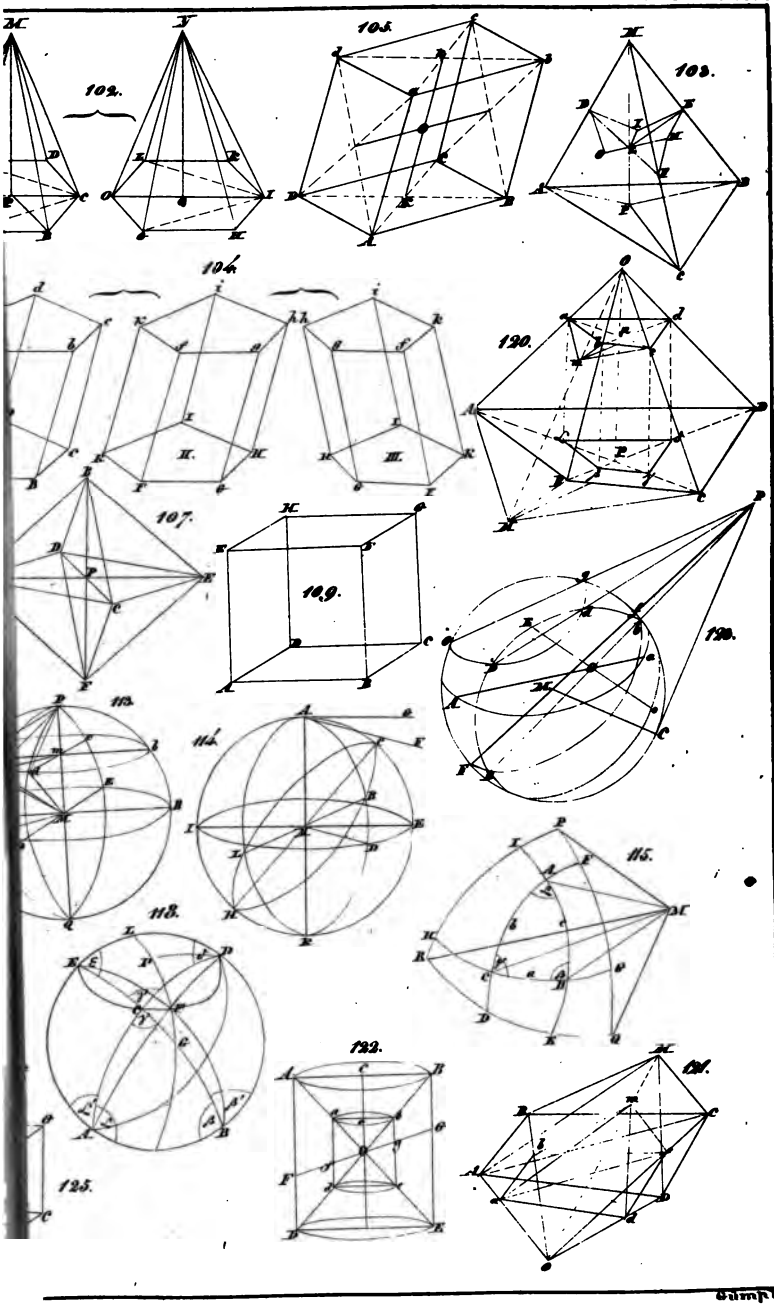

5.
6.
10.
11.
16.
14.
15.
21.
23.
17.
24.
27.
25.
26.

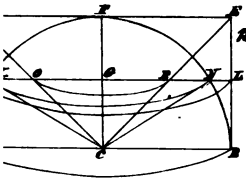

30.
31.
32.
33.
34.
35.
36.
37.
I.
II.
40.
41.
42.
43.
44.
45.
46.
47.
50.
51.



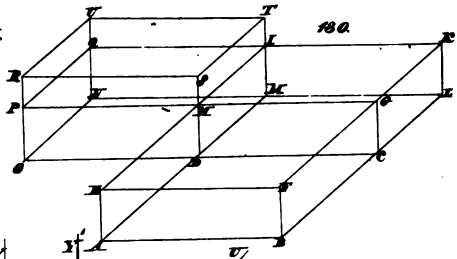
Gümpel sc.


74.
75.
76.
78.
77.
87.
88.
91.
92.
97.
94.
96.
93.

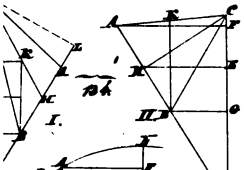

102.
105.
103.
104.
120.
107.
109.
110.
111.
112.
115.
118.
122.
124.
125.



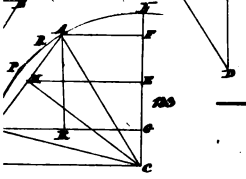
136.



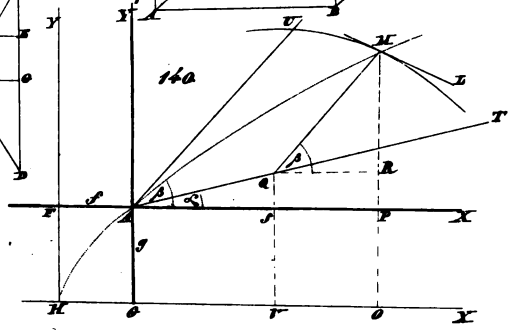
139.



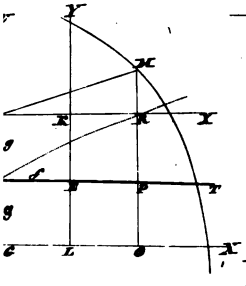
138.

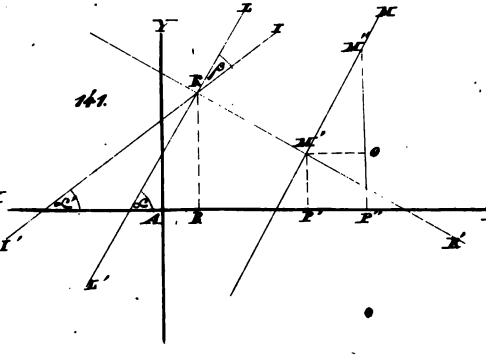


139.

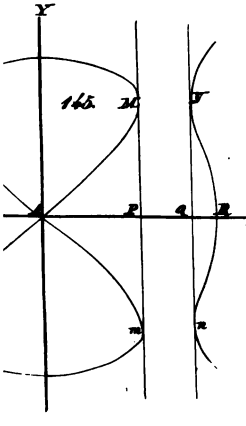


140.

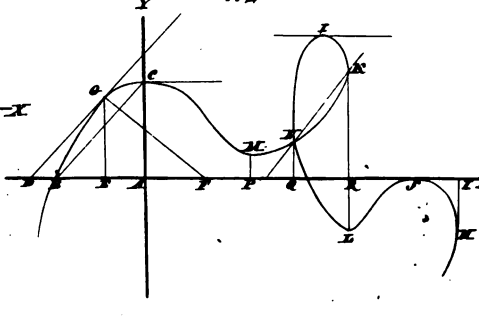




141.

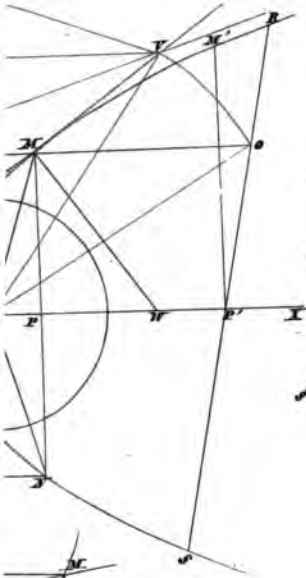


145.

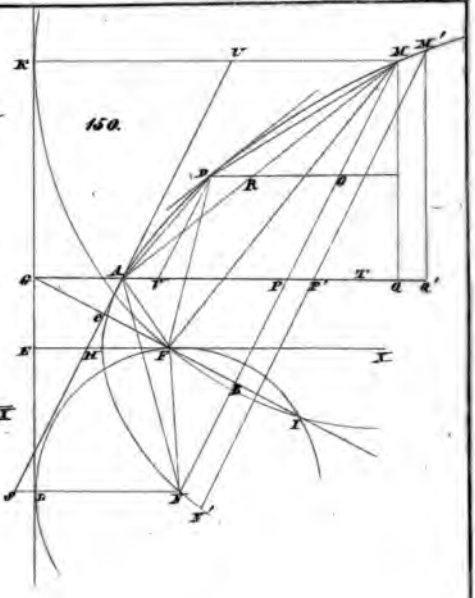


142.

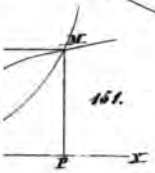
149.



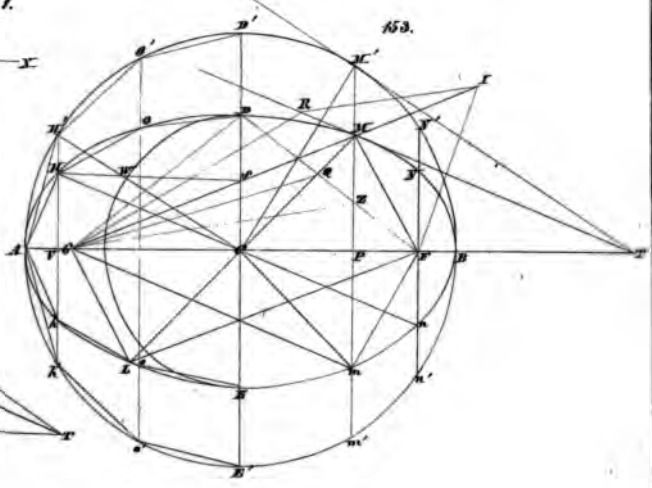
150.

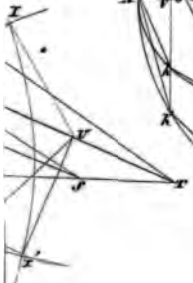


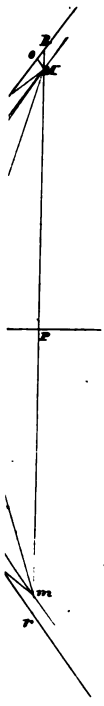
151.

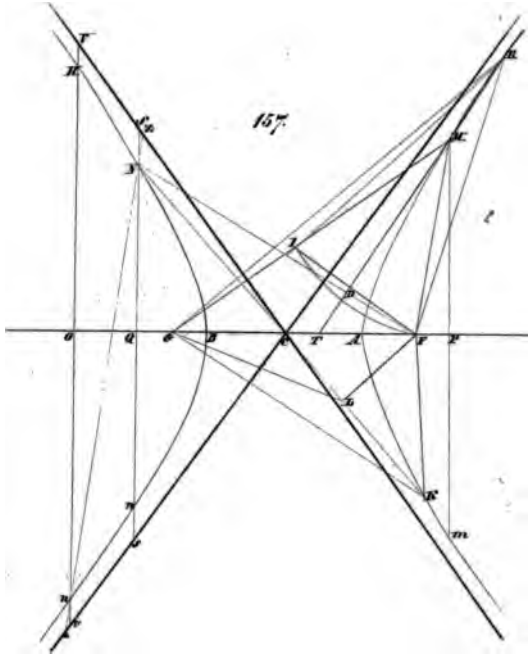


153.



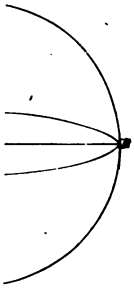


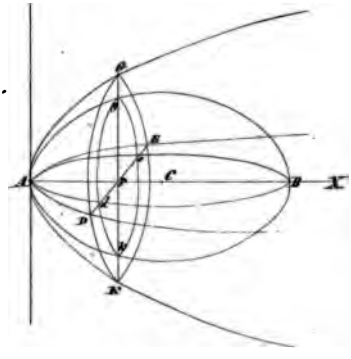




157.

160.





Julius Quimpel sculpt.

OCT 15 1937